CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD	PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **M-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

FIZYKA
Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
MFAP-R0-**100**-2305

DATA: **19 maja 2023 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **60**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

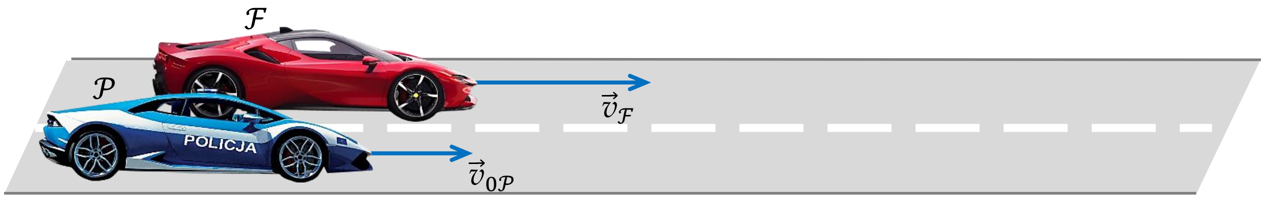
1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 28 stron (zadania 1–11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. W rozwiązaniach zadań rachunkowych przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku oraz pamiętaj o jednostkach.
4. Rozwiązania i odpowiedzi zapisz w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
5. Symbol zamieszczony w nagłówku zadania zwraca uwagę na to, że do rozwiązania zadania będzie pomocne lub niezbędne użycie linijki.
6. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki umieszczone są na marginesie przy każdym zadaniu.
9. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
10. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych na egzamin maturalny z biologii, chemii i fizyki*, linijki oraz kalkulatora naukowego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.

Zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.

Zadanie 1. (0–4)

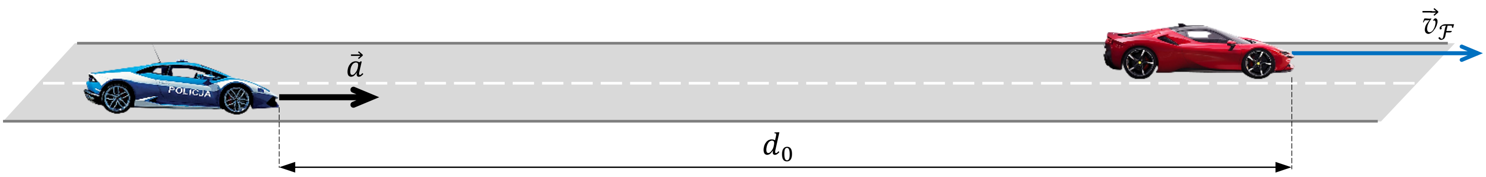
Samochód policyjny $\mathcal{P}$ jechał ze stałą prędkością o wartości $v_{0\mathcal{P}} = 20\ \mathrm{m/s}$. W pewnej chwili został on wyprzedzony przez samochód osobowy $\mathcal{F}$, jadący w tym samym kierunku ze stałą prędkością o wartości $v_{\mathcal{F}} = 35\ \mathrm{m/s}$ (zobacz rysunek 1.).

Rysunek 1.



W chwili $t_0 = 0$, gdy odległość między samochodami $\mathcal{P}$ i $\mathcal{F}$ zwiększyła się do $d_0 = 40\ \mathrm{m}$, samochód policyjny rozpoczął pościg ze stałym przyśpieszeniem o wartości $a = 6\ \mathrm{m/s^2}$ (zobacz rysunek 2.).

Rysunek 2. ($t_0 = 0$)



Odległość d między samochodami $\mathcal{P}$ i $\mathcal{F}$ jeszcze przez pewien czas rosła, w pewnej chwili osiągnęła wartość maksymalną d_{max}, a następnie zaczęła maleć.

Przyjmij, że:
- od chwili $t_0 = 0$ samochód policyjny $\mathcal{P}$ poruszał się ruchem jednostajnie przyśpieszonym prostoliniowym
- samochód $\mathcal{F}$ cały czas poruszał się ruchem jednostajnym prostoliniowym
- odległość pomiędzy samochodami traktujemy jako odległość pomiędzy ustalonymi punktami na przednich zderzakach.

1.
0–1–2–3–4

Oblicz d_{max} – maksymalną odległość pomiędzy samochodami $\mathcal{P}$ i $\mathcal{F}$ podczas pościgu. Zapisz obliczenia.

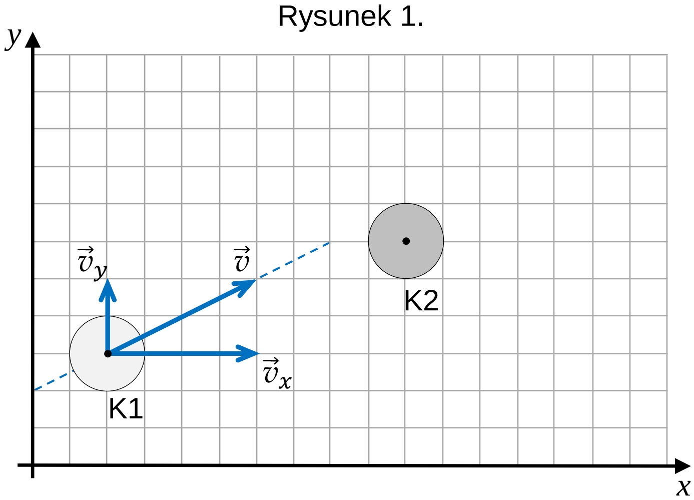
Zadanie 2.

Krążek K1 porusza się w inercjalnym układzie odniesienia $\mathcal{U}$ ze stałą prędkością $\vec{v}$, a krążek K2 spoczywa. Środek krążka K2 leży poza prostą wyznaczającą kierunek ruchu krążka K1. W pewnej chwili krążek K1 uderza w krążek K2.

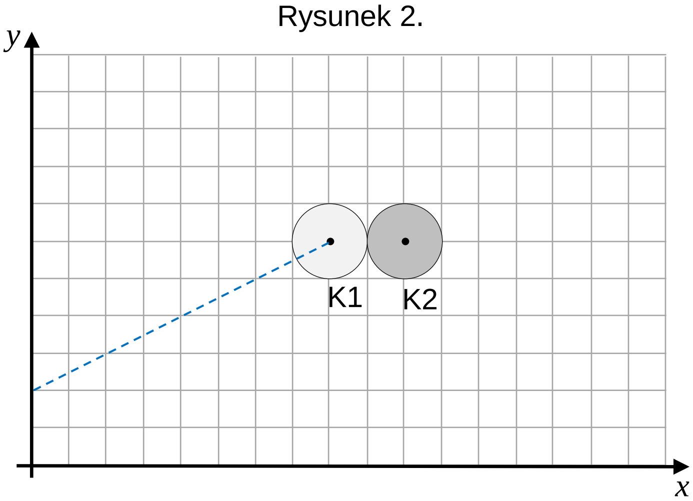
Na rysunku 1. w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono poruszający się krążek K1 i spoczywający krążek K2. Oznaczono prędkość $\vec{v}$ krążka K1 i składowe $\vec{v}_x, \vec{v}_y$ tej prędkości. Na rysunku 2. przedstawiono moment zderzenia się obu krążków.

Krążki są jednorodne, a ich masy <u>są sobie równe.</u> Pomijamy tarcie między krążkami K1 i K2 oraz między krążkami a podłożem.

Rysunek 1.



Rysunek 2.



2.1.
0–1

Zadanie 2.1. (0–1)

Na rysunku 2. powyżej narysuj parę sił wzajemnego oddziaływania pomiędzy krążkami podczas ich zderzenia. Każdą z sił przyłóż – odpowiednio – w punkcie środka masy krążka K1 lub krążka K2. Zachowaj odpowiednie kierunki i zwroty tych sił oraz relację (większy, równy, mniejszy) między ich wartościami.

Zadanie 2.2. (0–1)

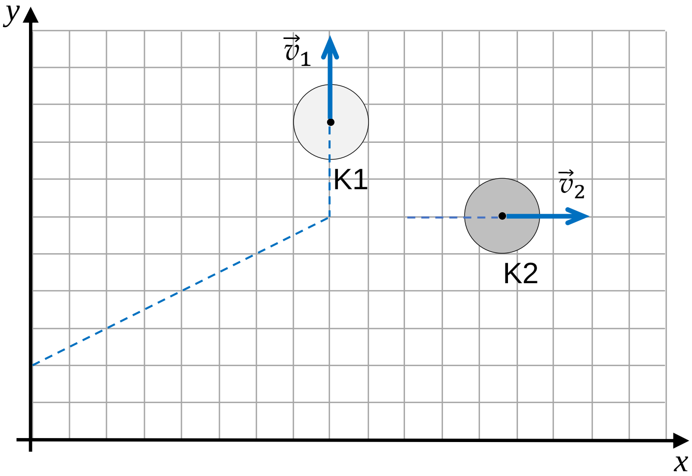
Załóżmy, że zderzenie krążków K1 i K2 było <u>doskonale sprężyste</u>.

Na którym rysunku (spośród A–D) prawidłowo narysowano i opisano wektory prędkości krążków bezpośrednio po zderzeniu w układzie odniesienia $\mathcal{U}$? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

2.2.
0–1

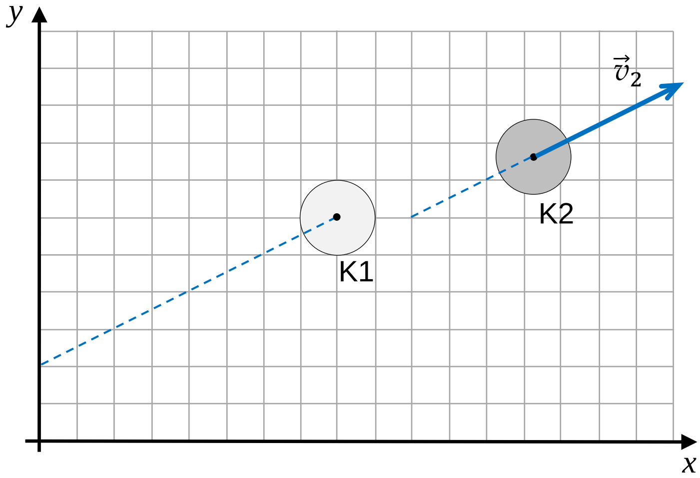
A.

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = \frac{|\vec{v}|}{2}$$



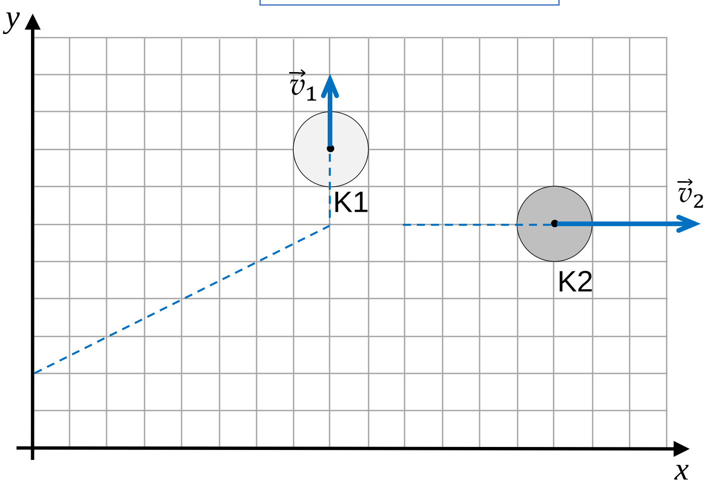
B.

$$\vec{v}_1 = 0 \qquad \vec{v}_2 = \vec{v}$$



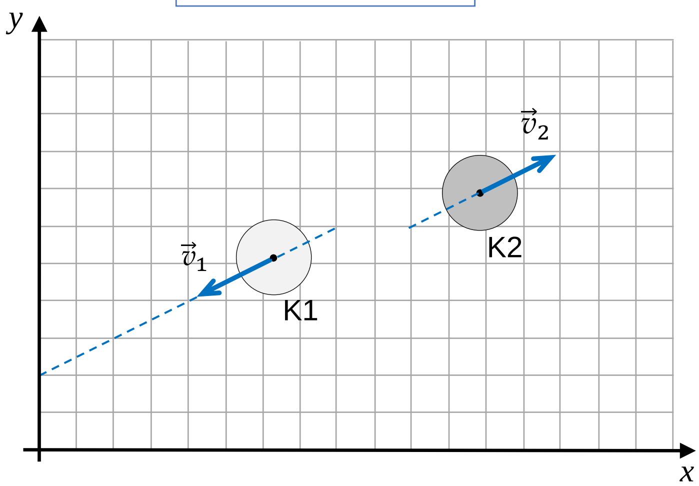
C.

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_y \qquad \vec{v}_2 = \vec{v}_x$$



D.

$$\vec{v}_1 = -\frac{\vec{v}}{2} \qquad \vec{v}_2 = \frac{\vec{v}}{2}$$



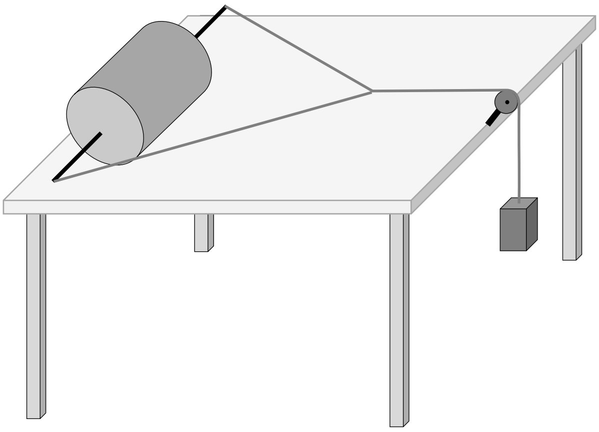
Zadanie 3.

Wzdłuż osi jednorodnego walca o masie m i promieniu R przechodzi cienki pręt, wokół którego walec może się obracać. Do tego pręta przymocowano cienką nierozciągliwą linkę, którą przewieszono przez bloczek. Na końcu linki zawieszono ciężarek o masie m (równej masie walca). Początkowo walec był unieruchomiony i spoczywał na stole. W pewnej chwili walec – ciągnięty przez linkę – rozpoczął ruch i toczył się dalej bez poślizgu po poziomej powierzchni stołu. Opisaną sytuację ilustrują rysunki 1. i 2.

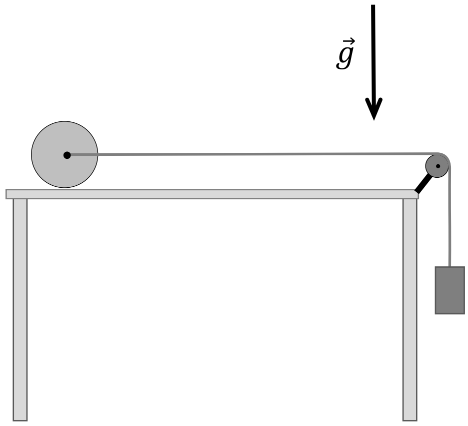
Do analizy zagadnienia przyjmij model zjawiska, w którym:

- moment bezwładności walca względem jego osi symetrii jest równy $I = \frac{1}{2}mR^2$
- pomijamy masę linki, masę bloczka oraz masę pręta na osi symetrii walca
- zakładamy, że ruch walca i ciężarka odbywa się w układzie inercjalnym
- siła tarcia statycznego $\vec{T}$ między walcem a powierzchnią stołu nie osiągnęła wartości maksymalnej
- pomijamy inne (tzn. oprócz tarcia statycznego) opory ruchu układu.

Rysunek 1.



Rysunek 2. (widok z boku)



3.1.
0–1–2

Zadanie 3.1. (0–2)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Gdy walec toczy się bez poślizgu, to w czasie jednego obrotu przebywa drogę o długości $2\pi R$.	**P**	**F**
2.	Energia kinetyczna ruchu postępowego walca jest większa od energii kinetycznej ruchu obrotowego walca względem jego osi.	**P**	**F**
3.	Energia potencjalna opadającego ciężarka zamienia się w całości na energię kinetyczną ruchu postępowego walca i ruchu obrotowego walca.	**P**	**F**

Brudnopis

Zadanie 3.2. (0–4)

3.2.
0–1–2–3–4

Wyprowadź wzór pozwalający wyznaczyć wartość a przyśpieszenia ciężarka w zależności tylko od wartości g przyśpieszenia ziemskiego. Zapisz odpowiednie równania i przekształcenia oraz podaj (w ramce na dole strony) postać tego wzoru.

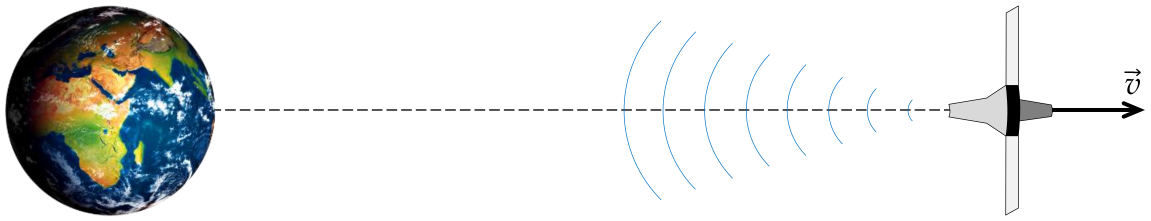
Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania energii mechanicznej układu lub skorzystaj z drugiej zasady dynamiki dla ruchu postępowego walca, dla ruchu obrotowego walca i dla ruchu postępowego ciężarka.

$a =$

Zadanie 4.

Sonda kosmiczna oddala się od Ziemi z prędkością $\vec{v}$ wzdłuż prostej przechodzącej przez środek Ziemi. Ta sonda emituje w stronę Ziemi falę elektromagnetyczną o częstotliwości dokładnie $f_{źr} = 3\ \mathrm{GHz}$ (podana częstotliwość jest określona w układzie odniesienia związanym z sondą, czyli jest częstotliwością źródła fali). Sytuację ilustruje rysunek poglądowy poniżej (odległości na rysunku są umowne).

Rysunek



Odbierana na Ziemi fala ma częstotliwość f_Z różniącą się od częstotliwości źródła fali o $|\Delta f| = 750\ \mathrm{kHz}$. Wartość prędkości światła w próżni oznaczamy jako c.
Przyjmij, że $v \ll c$ oraz $c \approx 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$.

4.1.
0–1

Zadanie 4.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C i jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Fala elektromagnetyczna wysyłana przez sondę porusza się względem Ziemi z prędkością równą

A.	$c - v$,	ponieważ	**1.**	prędkość fali elektromagnetycznej jest niezależna od ruchu źródła tej fali.
B.	c,		**2.**	źródło oddalające się od Ziemi unosi ze sobą falę elektromagnetyczną i zmniejsza jej prędkość.
C.	$c + v$,		**3.**	prędkość fali elektromagnetycznej jest zawsze powiększona o prędkość źródła tej fali.

4.2.
0–1

Zadanie 4.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zarejestrowana na Ziemi częstotliwość f_Z fali elektromagnetycznej wyemitowanej przez sondę jest równa

A. $3{,}75000\ \mathrm{GHz}$ **B.** $2{,}25000\ \mathrm{GHz}$ **C.** $3{,}00075\ \mathrm{GHz}$ **D.** $2{,}99925\ \mathrm{GHz}$

Brudnopis

Zadanie 4.3. (0–1)

Zarejestrowaną na Ziemi długość fali elektromagnetycznej wyemitowanej przez sondę oznaczymy jako λ_Z, a długość tej fali elektromagnetycznej w układzie odniesienia sondy oznaczymy jako $\lambda_{źr}$.

4.3. 0–1

Oceń prawdziwość poniższych relacji. Zaznacz P, jeśli relacja jest prawdziwa, albo F – jeśli jest fałszywa.

1.	$\lambda_{źr} \approx 0{,}10\ \mathrm{m}$	**P**	**F**
2.	$\lambda_Z > \lambda_{źr}$	**P**	**F**

Brudnopis

Zadanie 4.4. (0–2)

4.4. 0–1–2

Oblicz v – wartość prędkości sondy względem Ziemi. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5.

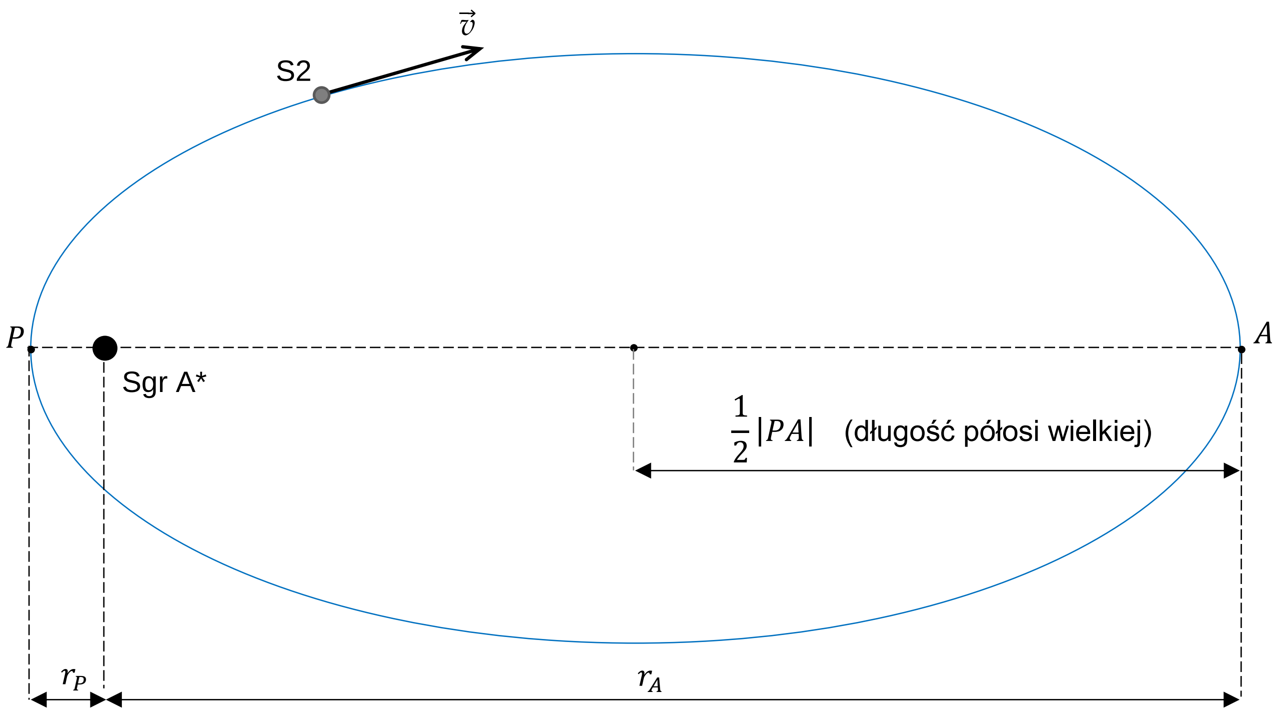
Sagittarius A* (Sgr A*) to bardzo masywny obiekt znajdujący się w centrum naszej galaktyki. Gwiazda znana jako S2 obiega obiekt Sgr A* po wydłużonej orbicie eliptycznej. Parametry tego ruchu orbitalnego są następujące:

- okres obiegu S2 dookoła Sgr A* wynosi $T_{S2} = 16$ lat ziemskich
- najmniejsza odległość środka S2 od centrum Sgr A* jest równa $r_P = 120 \text{ au}$
- największa odległość środka S2 od centrum Sgr A* jest równa $r_A = 1820 \text{ au}.$

Przyjmij, że Sgr A* się nie porusza, oraz pomiń wpływ innych ciał na ruch S2.

Opisaną sytuację przedstawiono na rysunku 1. Ponadto oznaczono wektor $\vec{v}$ prędkości środka S2 w przedstawionym położeniu na orbicie.

Rysunek 1.

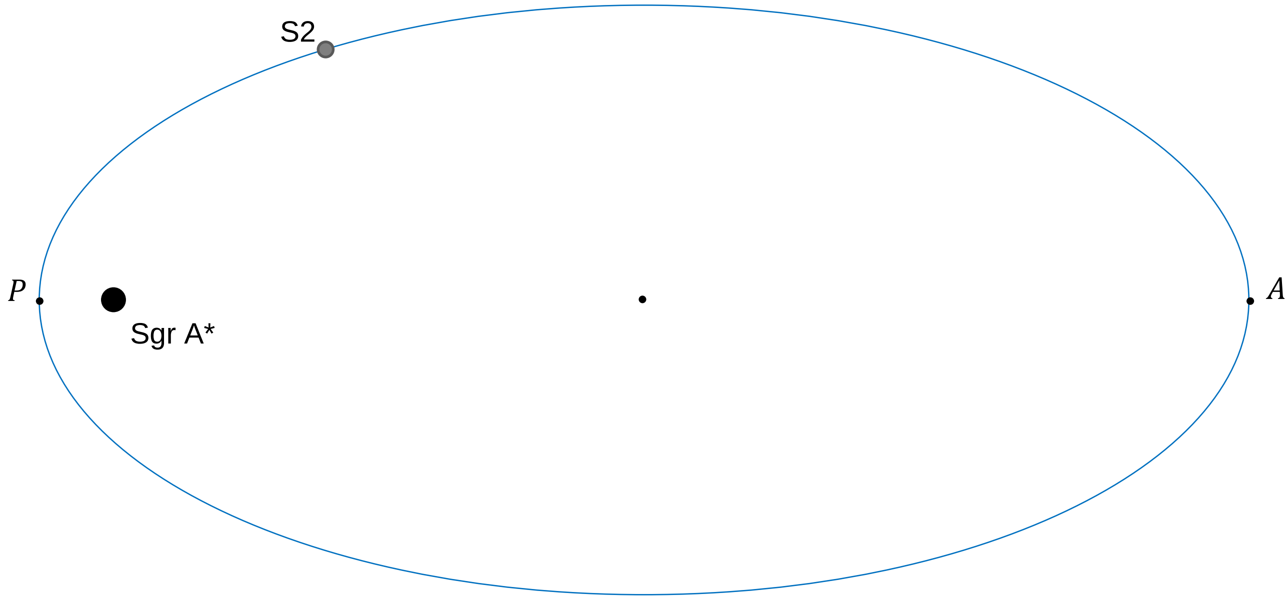


Zadanie 5.1. (0–1)

Na rysunku 2. narysuj wektor przyśpieszenia $\vec{a}$ środka gwiazdy S2 w oznaczonym położeniu na orbicie. Zachowaj odpowiedni kierunek i zwrot tego wektora (długość może być dowolna).

5.1.
0–1

Rysunek 2.



Zadanie 5.2. (0–1)

Wartość prędkości środka S2 w <u>punkcie P</u> orbity (rysunek 1. na stronie 12) oznaczymy jako v_P, a wartość prędkości środka S2 w <u>punkcie A</u> orbity oznaczymy jako v_A. Prędkość środka S2 w punkcie P lub w punkcie A jest prostopadła do promienia wodzącego (odcinka łączącego środki S2 i Sgr A*).

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

5.2.
0–1

Iloraz $\frac{v_P}{v_A}$ jest równy (w zaokrągleniu do trzech cyfr znaczących)

A. $\frac{v_P}{v_A} \approx 0{,}00435$ **B.** $\frac{v_P}{v_A} \approx 0{,}0659$ **C.** $\frac{v_P}{v_A} \approx 15{,}2$ **D.** $\frac{v_P}{v_A} \approx 230$

Brudnopis

Informacja do zadań 5.3.–5.4.

Załóżmy, że ciało $\mathcal{C}_1$ krąży po orbicie $\mathcal{O}_1$ wokół centrum grawitacyjnego o masie M_1, a ciało $\mathcal{C}_2$ krąży po orbicie $\mathcal{O}_2$ wokół centrum grawitacyjnego o masie M_2. Zakładamy, że na każde z tych ciał działa jedynie siła pochodząca od centrum grawitacyjnego, dookoła którego dane ciało krąży. Stosunek mas M_1 i M_2 można obliczyć ze wzoru:

$$\frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$$

gdzie: T_1 i T_2 są okresami obiegu ciał po orbitach – odpowiednio – $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$, natomiast a_1 i a_2 zależą od rodzaju orbity:

- gdy orbity $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ są kołowe, to a_1 i a_2 są odpowiednio promieniami tych orbit
- gdy orbita $\mathcal{O}_1$ jest eliptyczna, a orbita $\mathcal{O}_2$ jest kołowa, to a_1 jest długością półosi wielkiej orbity $\mathcal{O}_1$, natomiast a_2 jest promieniem orbity $\mathcal{O}_2$.

Zadanie 5.3. (0–2)

Masę obiektu Sgr A* oznaczymy jako M_{SA}, a masę Słońca oznaczymy jako M_{S}.

Przyjmij, że Ziemia porusza się dookoła Słońca po orbicie kołowej o promieniu $a_{\mathrm{Z}} = 1{,}0\ \mathrm{au}$ z okresem obiegu $T_{\mathrm{Z}} = 1{,}0\ \mathrm{rok}$. Długość półosi wielkiej orbity gwiazdy S2, poruszającej się wokół obiektu Sgr A*, zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1. (strona 12), jest równa $\frac{|PA|}{2}$.

5.3.
0–1–2

Oblicz iloraz $\frac{M_{\mathrm{SA}}}{M_{\mathrm{S}}}$. Zapisz obliczenia. Wynik podaj zaokrąglony do dwóch cyfr znaczących.

Zadanie 5.4. (0–3)

5.4.
0–1–2–3

Wyprowadź wzór podany w informacji do zadań 5.3.–5.4. w przypadku, gdy orbity $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ są kołowe.

Zadanie 6.

W cylindrze szczelnie zamkniętym ruchomym tłokiem znajduje się $n = 1\ \mathrm{mol}$ jednoatomowego gazu doskonałego. Ten gaz poddano kolejno dwóm przemianom.

- W pierwszej przemianie gaz ogrzewano, utrzymując <u>stałą objętość</u>, i dostarczono do tego gazu $Q_1 = 100\ \mathrm{J}$ ciepła.
- W drugiej przemianie gaz ogrzewano, utrzymując <u>stałe ciśnienie</u>, i dostarczono do tego gazu $Q_2 = 100\ \mathrm{J}$ ciepła, czyli tę samą ilość ciepła, ile dostarczono w pierwszej przemianie.

Ciepło molowe tego gazu przy stałej objętości wynosi $C_V = \frac{3}{2}R$, gdzie R jest stałą gazową.

6.1.
0–1

Zadanie 6.1. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	W pierwszej przemianie wartość siły parcia gazu na tłok jest wprost proporcjonalna do temperatury bezwzględnej tego gazu.	**P**	**F**
2.	W drugiej przemianie objętość gazu w cylindrze jest wprost proporcjonalna do średniej energii kinetycznej cząsteczek tego gazu.	**P**	**F**

Zadanie 6.2. (0–1)

Przyrost temperatury gazu w pierwszej przemianie oznaczymy jako ΔT_1, a w drugiej przemianie – jako ΔT_2.

6.2.
0–1

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C i jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Przyrosty temperatury gazu w opisanych przemianach spełniają relację

A.	$\Delta T_1 > \Delta T_2$,	ponieważ przyrost energii wewnętrznej gazu jest	**1.**	taki sam w obu przemianach.
B.	$\Delta T_1 < \Delta T_2$,		**2.**	większy w pierwszej przemianie.
C.	$\Delta T_1 = \Delta T_2$,		**3.**	większy w drugiej przemianie.

6.3.
0–1–2–3

Zadanie 6.3. (0–3)

Oblicz pracę, którą wykonała siła parcia gazu na tłok w drugiej przemianie. Zapisz obliczenia.

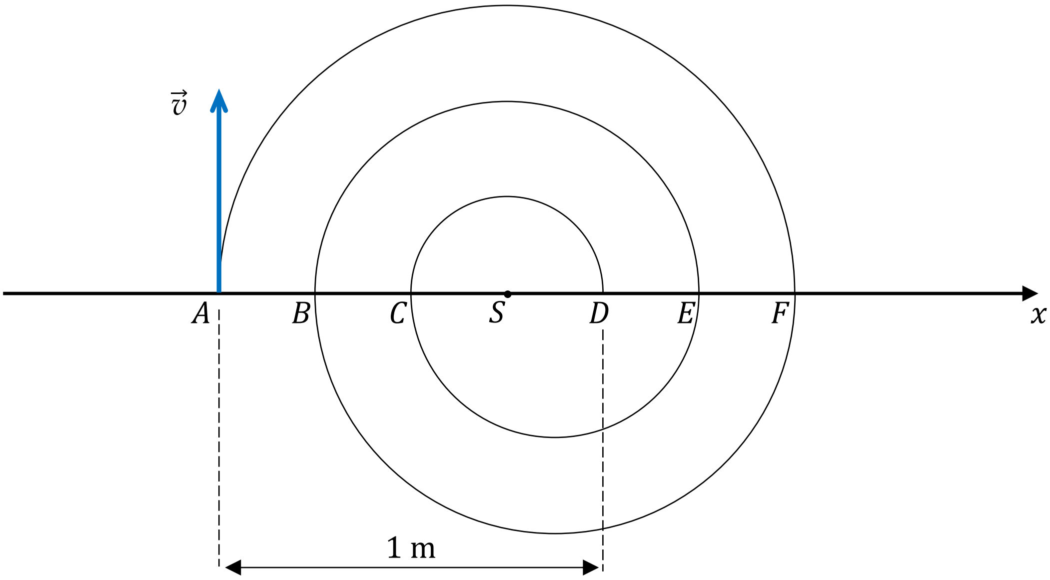
Zadanie 7.

Proton poruszał się w próżni, w polu magnetycznym po torze, który składał się z półokręgów AF, FB, BE, EC, CD (zobacz rysunek). Na każdym z tych półokręgów wektor indukcji magnetycznej był prostopadły do płaszczyzny ruchu protonu i miał stałą wartość, ale dla różnych półokręgów wartości te były różne i wynosiły – odpowiednio – B_{AF}, B_{FB}, B_{BE}, B_{EC}, B_{CD}.

W chwili początkowej $t_A = 0$ proton znajdował się w punkcie A i miał prędkość $\vec{v}$ (prostopadłą do wektora indukcji magnetycznej). Dalej proton poruszał się po opisanym torze i po pewnym czasie uderzył w tarczę znajdującą się w punkcie D. Wartość wektora indukcji magnetycznej na półokręgu AF wynosiła $B_{AF} = 0{,}2\ \mathrm{T}$. Długości odcinków na poniższym rysunku spełniają równości:

$$|AB| = |BC| = |CS| = |SD| = |DE| = |EF| \qquad \text{oraz} \qquad |AD| = 1\ \mathrm{m}$$

Rysunek



W zadaniach 7.1.–7.3. pomijamy siłę grawitacji działającą na proton.

7.1.
0–1–2

Zadanie 7.1. (0–2)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wektor indukcji pola magnetycznego wzdłuż całego toru ruchu protonu ma zwrot przed płaszczyznę rysunku (tzn. w stronę patrzącego).	**P**	**F**
2.	Wartość siły magnetycznej Lorentza działającej na proton jest stała na całej długości toru od punktu A do punktu D.	**P**	**F**
3.	Czas ruchu protonu po każdym z półokręgów AF, FB, BE, EC, CD jest taki sam.	**P**	**F**

Zadanie 7.2. (0–2)

7.2. 0–1–2

Wykaż, że wartość prędkości protonu w ruchu po każdym z półokręgów jest stała. Powołaj się na:

- **odpowiednie własności siły działającej na proton oraz**
- **zasady dynamiki albo odpowiednie twierdzenie o energii kinetycznej.**

Zadanie 7.3. (0–3)

7.3. 0–1–2–3

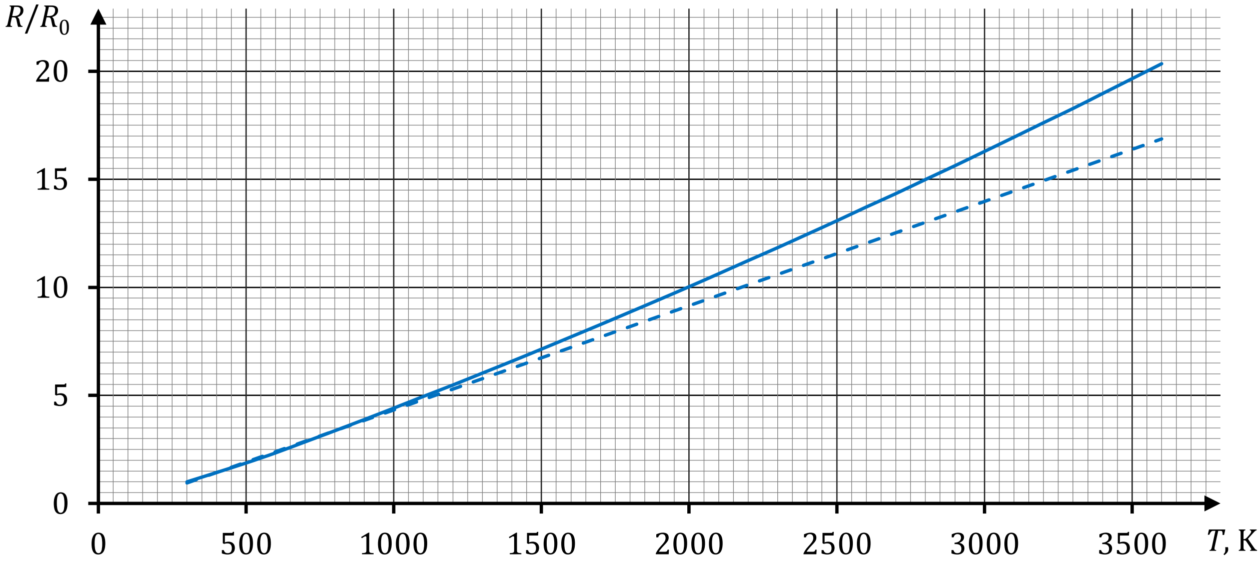
Oblicz wartość B_{CD} wektora indukcji pola magnetycznego działającego na proton, gdy poruszał się on po półokręgu CD. Zapisz obliczenia.

Wskazówka: Wartość prędkości protonu poruszającego się po torze $AFBECD$ była stała.

Zadanie 8.

Do produkcji włókien tradycyjnych żarówek wykorzystywano bardzo cienkie druty wolframowe. Gdy przez włókno wolframowe pewnej żarówki płynął prąd o niewielkim natężeniu, to włókno utrzymywało temperaturę $T_0 = 300\ \mathrm{K}$, a jego opór wynosił $R_0 \approx 65\ \Omega$. Po podłączeniu tej żarówki do sieci o napięciu $230\ \mathrm{V}$ pobierała ona moc (znamionową) $60\ \mathrm{W}$. Wówczas włókno rozgrzewało się do wysokiej temperatury, a jego opór był wielokrotnie większy od R_0.

Na poniższym wykresie linią ciągłą przedstawiono zależność R/R_0 od temperatury T, gdzie R oznacza opór włókna wolframowego o temperaturze T. W zakresie temperatur od $300\ \mathrm{K}$ do $1000\ \mathrm{K}$ ta zależność ma w przybliżeniu charakter liniowy (tzn. jej wykres pokrywa się częściowo z linią prostą narysowaną przerywaną kreską).



8.1.
0–1–2

Zadanie 8.1. (0–2)

Oblicz α – wartość temperaturowego współczynnika oporu wolframu – dla przedziału temperatur $300\ \mathrm{K} < T < 1000\ \mathrm{K}$. Zapisz obliczenia.

Wskazówka: Skorzystaj z Wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych na egzamin maturalny z biologii, chemii i fizyki *(strona 18 broszury).*

Zadanie 8.2. (0–3)

Wyznacz temperaturę włókna wolframowego żarówki (opisanej w zadaniu 8.) o mocy znamionowej $P_z = 60\ \mathrm{W}$, zasilanej napięciem $U_z = 230\ \mathrm{V}$. Zapisz obliczenia.

8.2. 0–1–2–3

Zadanie 8.3. (0–2)

Średnica drutu wolframowego, z którego wykonano włókno żarówki, jest równa $d = 30\ \mu\mathrm{m}$. Opór właściwy wolframu w temperaturze $T_0 = 300\ \mathrm{K}$ jest równy $\rho_0 = 5{,}6 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$.

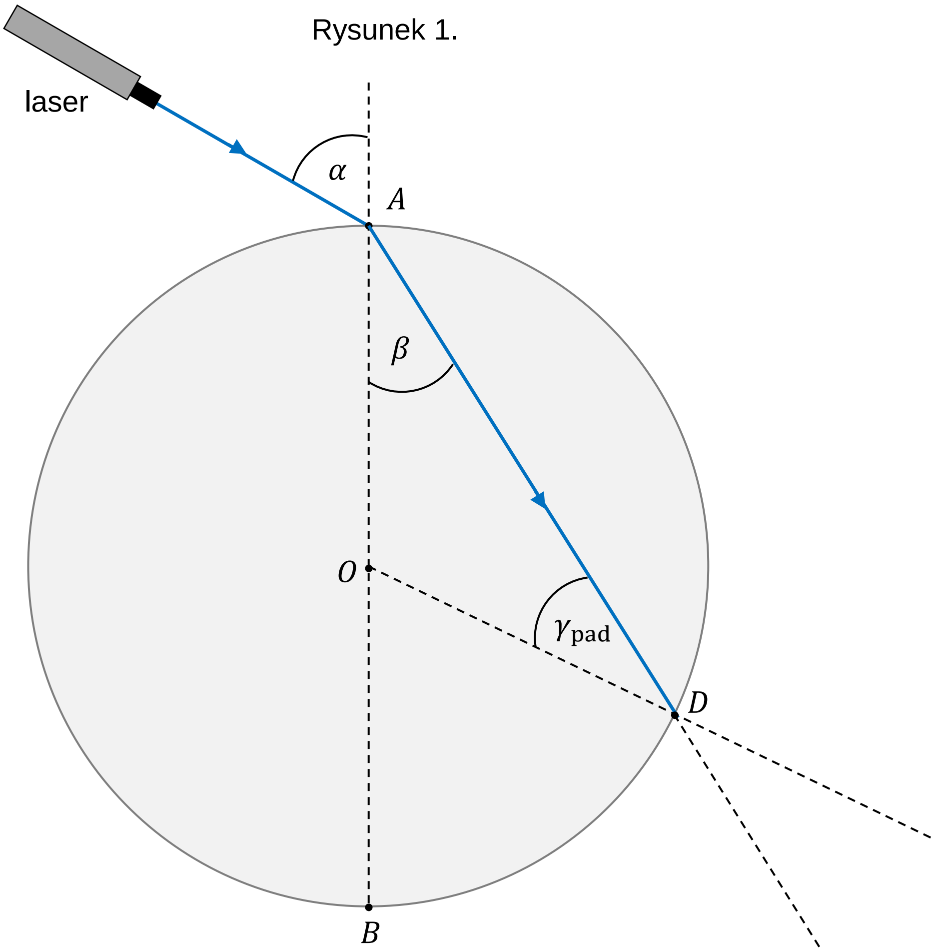
Oblicz długość drutu wolframowego, z którego wykonano włókno tej żarówki. Zapisz obliczenia.

8.3. 0–1–2

Zadanie 9.

Promień światła monochromatycznego biegnie w powietrzu i pada na brzeg szklanego krążka w punkcie A. Kąt padania w punkcie A jest równy α, a kąt załamania tego promienia jest równy β. Część promienia, która wniknęła do szkła w punkcie A, pada dalej na brzeg krążka w punkcie D. Na rysunku 1. (poniżej) oraz na rysunku 2. (na stronie 23) przedstawiono bieg promienia tylko do punktu D, przy czym pominięto część promienia odbitą w punkcie A. Kreskami przerywanymi oznaczono odcinki pomocnicze. Punkt O jest środkiem krążka.

Rysunek 1.



Zadanie 9.1. (0–3)

Część promienia AD, która pada na brzeg krążka od strony szkła w punkcie D, odbija się z powrotem do szkła, a część tego promienia załamuje się i biegnie dalej w powietrzu. Kąty: padania, załamania i odbicia promienia AD w punkcie D, oznaczymy – odpowiednio – jako: γ_{pad}, $\gamma_{\text{zał}}$, γ_{odb}.

9.1.
0–1–2–3

<u>Narysuj</u> na rysunku 1. dalszy bieg promienia załamanego i odbitego w punkcie D. <u>Oznacz</u> łukami i <u>podpisz</u> w odpowiednich miejscach kąty: $\gamma_{\text{zał}}$, γ_{odb}, a następnie określ relacje między miarami odpowiednich kątów – <u>wpisz</u> w każde wykropkowane miejsce odpowiedni znak wybrany spośród: $>$, $=$, $<$.

γ_{pad} .... γ_{odb} $\qquad$ γ_{pad} .... $\gamma_{\text{zał}}$ $\qquad$ $\gamma_{\text{zał}}$ .... α

Zadanie 9.2. (0–3)

Na rysunku 2. odcinek AC jest geometrycznym przedłużeniem promienia padającego na krążek. Długości odcinków oznaczonych na rysunku 2. wynoszą (w zaokrągleniu):

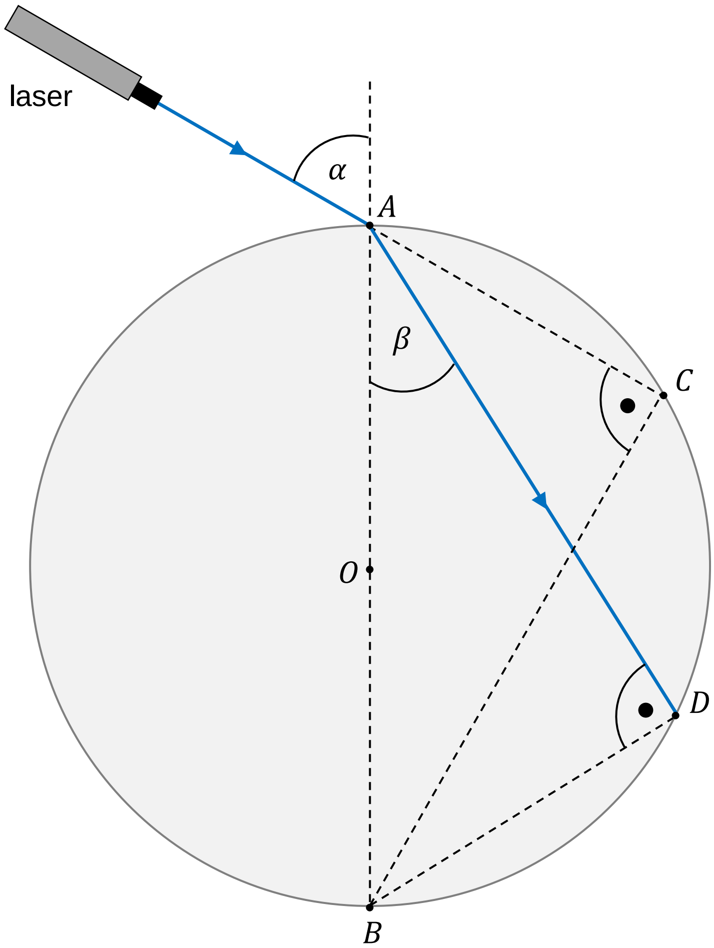
$|AB| \approx 9{,}0$ cm $|AC| \approx 4{,}5$ cm $|AD| \approx 7{,}7$ cm $|BC| \approx 7{,}8$ cm $|BD| \approx 4{,}8$ cm

Przyjmij, że wartość prędkości światła w powietrzu jest równa wartości prędkości światła w próżni.

Oblicz wartość prędkości światła w szkle, z którego jest wykonany krążek. Zapisz obliczenia. Wykorzystaj niektóre z podanych długości odcinków. Wynik podaj zaokrąglony do dwóch cyfr znaczących.

9.2.
0–1–2–3

Rysunek 2.



Zadanie 10.

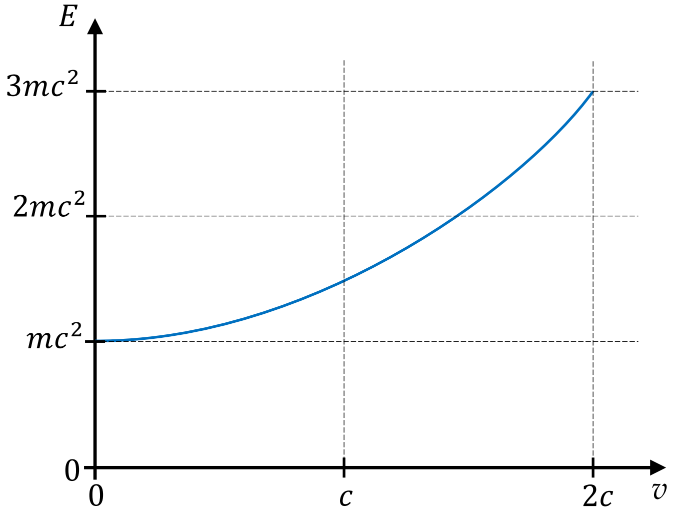
Elektron o prędkości początkowej równej zero został rozpędzony w polu elektrycznym o napięciu U do prędkości o wartości v. Energia kinetyczna, którą uzyskał elektron, była dwa razy większa od jego energii spoczynkowej.

10.1.
0–1

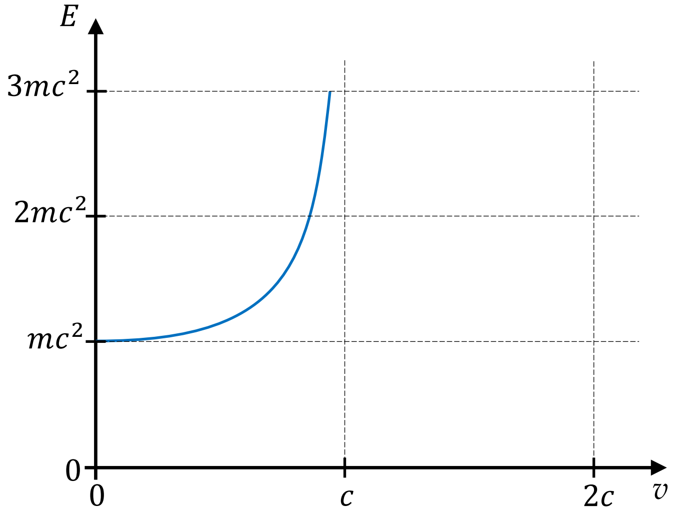
Zadanie 10.1. (0–1)

Na którym wykresie (spośród A–D) prawidłowo przedstawiono zależność <u>energii całkowitej</u> E (sumy energii kinetycznej i spoczynkowej) elektronu od jego prędkości? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

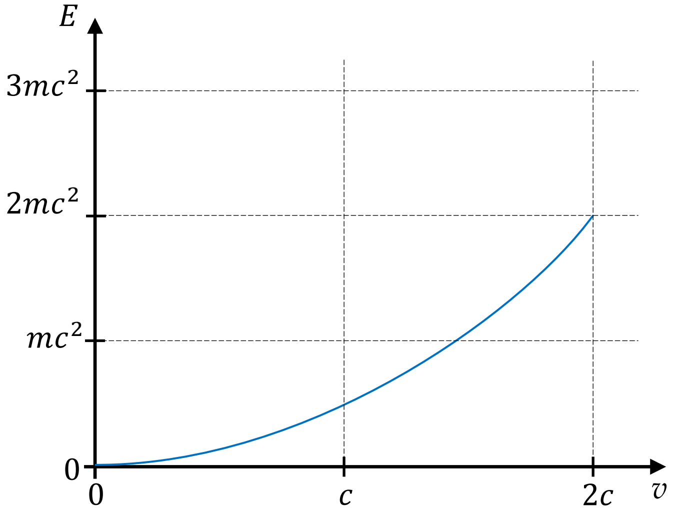
A.



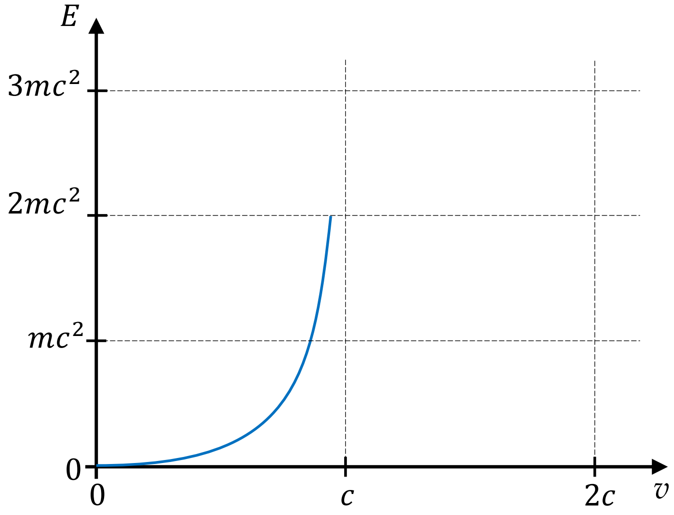
B.



C.



D.



Zadanie 10.2. (0–3)

Oblicz iloraz $\frac{v}{c}$, gdzie c jest wartością prędkości światła w próżni. Zapisz obliczenia. Wynik podaj zaokrąglony do dwóch cyfr znaczących.

10.2.
0–1–2–3

Zadanie 10.3. (0–1)

Energia spoczynkowa elektronu jest równa (w zaokrągleniu) $E_0 \approx 5{,}1 \cdot 10^5$ eV.

Dokończ zdanie. Wpisz właściwą liczbę w wykropkowanym miejscu.

10.3.
0–1

Napięcie U pola elektrycznego, w którym został rozpędzony elektron, wynosi .... V.

Brudnopis

Zadanie 11.

Pierwiastek o nazwie kopernik, oznaczony symbolem Cn, ma liczbę atomową $Z = 112$. Izotop $^{277}\mathrm{Cn}$ tego pierwiastka został po raz pierwszy wytworzony w wyniku bombardowania ołowianej tarczy jonami cynku $^{70}\mathrm{Zn}$.

Kopernik $^{277}\mathrm{Cn}$ jest izotopem nietrwałym.

Uwaga: W zadaniach 11.1., 11.2., 11.3. skorzystaj z Wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych na egzamin maturalny z biologii, chemii i fizyki.

Zadanie 11.1. (0–1)

Poniżej przedstawiono schemat reakcji jądrowej, w wyniku której powstają jądro izotopu $^{277}\mathrm{Cn}$ oraz pewna cząstka.

$$^{208}_{\dots}\mathrm{Pb} + {}^{70}_{\dots}\mathrm{Zn} \rightarrow {}^{277}_{\dots}\mathrm{Cn} + \dots$$

11.1.
0–1

Uzupełnij powyższy schemat tak, aby powstało równanie reakcji jądrowej. Wpisz w wykropkowane miejsca właściwe liczby atomowe oraz symbol lub nazwę cząstki, która powstaje w tej reakcji.

Zadanie 11.2. (0–2)

W wyniku sześciu kolejnych rozpadów α, z których pierwszy jest rozpadem jądra $^{277}\mathrm{Cn}$, powstało jądro pewnego pierwiastka.

11.2.
0–1–2

Podaj nazwę lub symbol pierwiastka, którego jądro powstało w wyniku tych sześciu rozpadów. Zapisz obliczenia.

Nazwa lub symbol pierwiastka: ....

Zadanie 11.3. (0–3)

Masa jądra izotopu $^{277}\mathrm{Cn}$ jest równa

$$m_{\mathrm{Cn}} = 460{,}138\,852 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

Oblicz najmniejszą energię, którą należałoby dostarczyć do jądra $^{277}\mathrm{Cn}$, aby rozbić je na oddzielne (tzn. nieoddziałujące ze sobą) nukleony. Zapisz obliczenia. Wynik podaj zaokrąglony do trzech cyfr znaczących.

11.3.
0–1–2–3

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

FIZYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

FIZYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

FIZYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Fizyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	MFAP-R0-100, MFAP-R0-200, MFAP-R0-300, MFAP-R0-700
Termin egzaminu:	19 maja 2023 r.
Data publikacji dokumentu:	28 czerwca 2023 r.

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Gdy wymaganie dotyczy treści szkoły podstawowej, dopisano (SP), a gdy zakresu podstawowego szkoły ponadpodstawowej – dopisano (P).

Zadanie 1. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1]	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: II.4) opisuje ruchy prostoliniowe jednostajne i jednostajnie zmienne, posługując się zależnościami położenia, wartości prędkości i przyśpieszenia oraz drogi od czasu.

Zasady oceniania[2]
(dla rozwiązania sposobem 1.)

4 pkt – poprawna metoda (opisana w warunku za 3 pkt) obliczenia maksymalnej odległości pomiędzy samochodami **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $d_{max} = 58{,}75\ \mathrm{m}$.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia (lub wyznaczenia na symbolach) czasu t_{max}, w którym odległość między samochodami jest maksymalna (tzn. przyrównanie wartości prędkości i skorzystanie ze wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie przyśpieszonym) **oraz** zapisanie odległości maksymalnej jako różnicy położeń samochodów w chwili t_{max}, **oraz** zapisanie wyrażeń (na symbolach lub z podstawionymi danymi) poprawnie określających położenia samochodów (tzn. skorzystanie z równań ruchu jednostajnie przyśpieszonego i ruchu jednostajnego prostoliniowego), np. zapisy równoważne poniższym:

$20 + 6t_{max} = 35$ oraz $d_{max} = (40 + 35t_{max}) - (20t_{max} + 3t_{max}^2)$

2 pkt – poprawna metoda obliczenia (lub wyznaczenia na symbolach) czasu t_{max}, w którym odległość między samochodami jest maksymalna (tzn. przyrównanie wartości prędkości i skorzystanie ze wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie przyśpieszonym) **oraz** zapisanie odległości maksymalnej jako różnicy położeń samochodów w chwili t_{max} (lub sumy położenia początkowego d_0 i różnicy Δs dróg, jakie przebyły oba samochody do wyrównania prędkości) np. zapisy równoważne poniższym:

$20 + 6t_{max} = 35$ oraz $\{d_{max} = x_{\mathcal{F}}(t_{max}) - x_{\mathcal{P}}(t_{max})$ lub $d_{max} = d_0 + \Delta s\}$

LUB

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. z 2022 r. poz. 1246).

[2] Pod opisem warunków za przyznanie punktów, w niektórych przypadkach podano przykładowe zapisy (lub przykładowe zapisy równoważne), które spełniają te warunki w minimalnym stopniu.

– poprawna metoda obliczenia (lub wyznaczenia na symbolach) czasu t_{max}, w którym odległość między samochodami jest maksymalna (tzn. przyrównanie wartości prędkości i skorzystanie ze wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie przyśpieszonym) **oraz** zapisanie wyrażenia (na symbolach lub z podstawionymi danymi) poprawnie określającego położenie jednego z samochodów dla dowolnego t bądź wyznaczonego t_{max} (tzn. skorzystanie z równań ruchu jednostajnie przyśpieszonego lub ruchu jednostajnego prostoliniowego), np. zapisy równoważne poniższym:

$20 + 6t_{max} = 35$ oraz $\{ x_{\mathcal{F}}(t) = 40 + 35t$ lub $x_{\mathcal{P}}(t) = 20t + 3t^2\}$

1 pkt – opisanie strategii rozwiązania (bez wykonania dalszych obliczeń): stwierdzenie, że maksymalna odległość pomiędzy samochodami jest w chwili, w której wartości prędkości samochodów są sobie równe, a odległość między nimi jest równa różnicy położeń

LUB

– przyrównanie wartości prędkości obu samochodów **oraz** zastosowanie wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie przyśpieszonym dla samochodu $\mathcal{P}$ (na symbolach wielkości lub z podstawionymi danymi), np. zapisy równoważne poniższym:

$\{v_{\mathcal{P}} = v_{\mathcal{F}}$ oraz $v_{\mathcal{P}} = v_{0\mathcal{P}} + at\}$

albo

$20 + 6t_{max} = 35$

albo

$a = \dfrac{v_{\mathcal{F}} - v_{0\mathcal{P}}}{t_{max}}$ (w jednym zapisie)

LUB

– przyrównanie wartości prędkości obu samochodów **oraz** zapisanie odległości maksymalnej między samochodami jako różnicy położeń samochodów w chwili t_{max} (bądź sumy położenia początkowego i różnicy dróg, jakie przebyły oba samochody do wyrównania prędkości), np. zapisy równoważne poniższym:

$v_{\mathcal{P}} = v_{\mathcal{F}}$ oraz $d_{max} = x_{\mathcal{F}}(t_{max}) - x_{\mathcal{P}}(t_{max})$

albo

$v_{\mathcal{P}} = v_{\mathcal{F}}$ oraz $d_{max} = d_0 + \Delta s$

LUB

– poprawne zapisanie zależności położenia od czasu dla każdego z samochodów z wykorzystaniem równania ruchu jednostajnie przyśpieszonego prostoliniowego dla samochodu $\mathcal{P}$ i równania ruchu jednostajnego prostoliniowego dla samochodu $\mathcal{F}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$x_{\mathcal{P}} = 20t + 3t^2$ oraz $x_{\mathcal{F}} = 40 + 35t$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 2.)

4 pkt – poprawna metoda (opisana w warunkach za 3 pkt i 2 pkt) obliczenia maksymalnej odległości pomiędzy samochodami **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $d_{max} = 58{,}75\ \mathrm{m}$.

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia zależności $d(t)$ (funkcji $d(t)$) jako różnicy położeń samochodów od czasu **oraz** zapisanie prawidłowej postaci tej funkcji, **oraz** prawidłowa metoda obliczenia wartości maksymalnej funkcji $d(t)$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$d(t) = (40 + 35t) - (20t + 3t^2) = -3t^2 + 15t + 40 \quad \text{oraz} \quad d_{max} = -\frac{\Delta}{4A}$$

2 pkt – zapisanie odległości pomiędzy samochodami jako różnicy położeń **oraz** poprawne zapisanie zależności położenia od czasu dla każdego z samochodów, np. zapisy równoważne poniższym:

$$d = x_{\mathcal{F}} - x_{\mathcal{P}} \quad \text{oraz} \quad x_{\mathcal{P}} = 20t + 3t^2 \quad \text{i} \quad x_{\mathcal{F}} = 40 + 35t$$

1 pkt – opisanie strategii rozwiązania: zapisanie odległości pomiędzy samochodami jako różnicy położeń **oraz** stwierdzenie, że maksymalna odległość będzie największą wartością funkcji opisującej zależność różnicy położeń od czasu

LUB

– poprawne zapisanie zależności położenia od czasu dla każdego z samochodów z wykorzystaniem równania ruchu jednostajnie przyśpieszonego prostoliniowego dla samochodu $\mathcal{P}$ i równania ruchu jednostajnego prostoliniowego dla samochodu $\mathcal{F}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$x_{\mathcal{P}} = 20t + 3t^2 \quad \text{oraz} \quad x_{\mathcal{F}} = 40 + 35t$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 3.)

4 pkt – poprawna metoda (opisana w warunku za 3 pkt) obliczenia maksymalnej odległości pomiędzy samochodami **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $d_{max} = 58{,}75\ \mathrm{m}$.

3 pkt – zapisanie wzoru na prędkość $\tilde{v}_P$ samochodu $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia związanym z samochodem $\mathcal{F}$ **oraz** zapisanie warunku na tę prędkość, gdy odległość pomiędzy samochodami jest największa, **oraz** zapisanie odległości maksymalnej jako sumy odległości początkowej i drogi, jaką przebył samochód $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia $\mathcal{F}$, **oraz** poprawny sposób obliczenia drogi, jaką przebył samochód $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia $\mathcal{F}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t) = 6t - 15 \quad \text{oraz} \quad \tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 0 \quad \text{oraz} \quad d_{max} = d_0 + \frac{\tilde{v}_{\mathcal{P}}(0)^2}{2a}$$

2 pkt – zapisanie wzoru na prędkość $\tilde{v}_P$ samochodu $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia związanym z samochodem $\mathcal{F}$ **oraz** zapisanie warunku na tę prędkość, gdy odległość pomiędzy samochodami jest największa, **oraz** zapisanie odległości maksymalnej jako sumy odległości początkowej i drogi $\tilde{s}$, jaką przebył samochód $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia $\mathcal{F}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t) = 6t - 15 \quad \text{oraz} \quad \tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 0 \quad \text{oraz} \quad d_{max} = d_0 + \tilde{s}$$

LUB

– zapisanie wzoru na prędkość $\tilde{v}_P$ samochodu $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia związanym z samochodem $\mathcal{F}$ **oraz** zapisanie warunku na tę prędkość, gdy odległość pomiędzy samochodami jest największa, **oraz** poprawny sposób obliczenia drogi, jaką przebył samochód $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia $\mathcal{F}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t) = 6t - 15$ oraz $\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 0$ oraz $\tilde{s} = \dfrac{\tilde{v}_{\mathcal{P}}(0)^2}{2a}$

1 pkt – zapisanie wzoru na prędkość $\tilde{v}_P$ samochodu $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia związanym z samochodem $\mathcal{F}$ **oraz** zapisanie warunku na tę prędkość, gdy odległość pomiędzy samochodami jest największa, np. zapisy równoważne poniższym:

$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t) = 6t - 15$ oraz $\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 0$

LUB

– zapisanie warunku na prędkość $\tilde{v}_P$ samochodu $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia związanym z samochodem $\mathcal{F}$, gdy odległość pomiędzy samochodami jest największa **oraz** zapisanie odległości maksymalnej jako sumy odległości początkowej i drogi $\tilde{s}$, jaką przebył samochód $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia $\mathcal{F}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 0$ oraz $d_{max} = d_0 + \tilde{s}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga dodatkowa do zasad oceniania sposobem 3.

Sposób 3. rozwiązania może pomijać etap obliczenia t_{max}.

Przykładowe pełne rozwiązania[3]

Sposób 1. (z przyrównaniem wartości prędkości samochodów)

Odległość d pomiędzy samochodami zwiększa się (licząc od chwili $t_0 = 0$) w takim czasie, w jakim samochód $\mathcal{F}$ ma większą prędkość od samochodu $\mathcal{P}$. W chwili t_{max}, gdy wartości prędkości obu samochodów zrównają się, ta odległość będzie największa. Wynika to z faktu, że licząc od chwili t_{max}, wartość prędkości samochodu $\mathcal{P}$ staje się większa od wartości prędkości samochodu $\mathcal{F}$, a zatem odległość pomiędzy samochodami będzie malała – do momentu, gdy $\mathcal{P}$ dogoni $\mathcal{F}$.

Samochód $\mathcal{P}$ od chwili $t_0 = 0$ poruszał się ruchem jednostajnie przyśpieszonym, zatem zależność prędkości tego samochodu od czasu dana jest wzorem:

$$v_{\mathcal{P}} = v_{0\mathcal{P}} + at \quad \rightarrow \quad v_{\mathcal{P}} = 20 + 6t$$

Współczynniki liczbowe w równaniach ruchu wyrażamy w jednostkach podstawowych układu SI. Przyrównamy wartości prędkości obu samochodów i obliczymy t_{max} – czas, po jakim odległość pomiędzy samochodami będzie największa:

$$v_{\mathcal{P}} = v_{\mathcal{F}}$$

$$20 + 6t_{max} = 35 \quad \rightarrow \quad t_{max} = 2{,}5\ \text{s}.$$

[3] Przykładowe rozwiązania mogą zawierać dodatkowe komentarze, które nie podlegają ocenie. Wymagane elementy rozwiązania zdającego podlegające ocenie są wyszczególnione i opisane w kryteriach punktacji zasad oceniania.

Obliczymy odległość d_{max} pomiędzy samochodami w chwili t_{max}. Przyjmiemy, że w chwili $t_0 = 0$ samochód policyjny $\mathcal{P}$ znajdował się w położeniu $x_{0\mathcal{P}} = 0$, a samochód osobowy $\mathcal{F}$ znajdował się w położeniu $x_{0\mathcal{F}} = 40\ \mathrm{m}$. Określimy położenia $x_{\mathcal{P}}$, $x_{\mathcal{F}}$ obu samochodów w chwili t_{max} (licząc od chwili $t_0 = 0$).

Skorzystamy z równań ruchu jednostajnie przyśpieszonego prostoliniowego (dla $\mathcal{P}$) i ruchu jednostajnego prostoliniowego (dla $\mathcal{F}$):

$$x_{\mathcal{P}} = v_{0\mathcal{P}}t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \rightarrow \qquad x_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 20 \cdot 2{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (2{,}5)^2 = 68{,}75\ \mathrm{m}$$

$$x_{\mathcal{F}} = d_0 + v_{\mathcal{F}}t \qquad \rightarrow \qquad x_{\mathcal{F}}(t_{max}) = 40 + 35 \cdot 2{,}5 = 127{,}5\ \mathrm{m}$$

Odległość maksymalna d_{max} między samochodami jest równa różnicy położeń obu samochodów w chwili t_{max}.

$$d_{max} = 127{,}5\ \mathrm{m} - 68{,}75\ \mathrm{m} = 58{,}75\ \mathrm{m}$$

Sposób 2. (z obliczeniem maksimum funkcji)

Wyznaczymy odległość $d(t)$ między samochodami w funkcji czasu i znajdziemy maksimum tej funkcji. Funkcję $d(t)$ określamy w przedziale czasu od chwili $t_0 = 0$ do momentu, gdy $\mathcal{P}$ dogoni $\mathcal{F}$.

Przyjmiemy, że w chwili $t_0 = 0$ samochód policyjny $\mathcal{P}$ znajdował się w położeniu $x_{0\mathcal{P}} = 0$, a samochód osobowy $\mathcal{F}$ znajdował się w położeniu $x_{0\mathcal{F}} = d_0$. Określimy położenia $x_{\mathcal{P}}$, $x_{\mathcal{F}}$ obu samochodów w dowolnej chwili t, licząc od $t_0 = 0$ do momentu, gdy $\mathcal{P}$ dogoni $\mathcal{F}$. Skorzystamy z równań ruchu.

Samochód $\mathcal{P}$ od chwili $t_0 = 0$ poruszał się ruchem jednostajnie przyśpieszonym, zatem:

$$x_{\mathcal{P}} = v_{0\mathcal{P}}t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \rightarrow \qquad x_{\mathcal{P}} = 20t + \frac{1}{2} \cdot 6t^2 = 20t + 3t^2$$

Samochód $\mathcal{F}$ poruszał się ruchem jednostajnym prostoliniowym, zatem:

$$x_{\mathcal{F}} = d_0 + v_{\mathcal{F}}t \qquad \rightarrow \qquad x_{\mathcal{F}} = 40 + 35t$$

Współczynniki liczbowe w równaniach ruchu są wyrażone w jednostkach podstawowych układu SI.

Wyznaczymy odległość między samochodami w funkcji czasu t. Odległość d między samochodami jest równa różnicy położeń obu samochodów w chwili t:

$$d(t) = x_{\mathcal{F}} - x_{\mathcal{P}} \qquad \rightarrow \qquad d(t) = 40 + 35t - (20t + 3t^2)$$

$$d(t) = -3t^2 + 15t + 40$$

Uwaga!

Funkcja $d(t)$ jest określona w przedziale czasu od $t_0 = 0$ do czasu, po jakim $\mathcal{P}$ dogoni $\mathcal{F}$. Będzie to czas, po którym odległość pomiędzy samochodami jest równa zero:

$$d(t) = 0 \qquad \rightarrow \qquad -3t^2 + 15t + 40 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{705} \approx 26{,}6\ \mathrm{s} \qquad \rightarrow \qquad t_1 \approx -1{,}9\ \mathrm{s} \qquad t_2 \approx 6{,}9\ \mathrm{s}$$

Funkcję kwadratową $d(t) = -3t^2 + 15t + 40$ rozpatrujemy dla $t \in [0, t_2]$.

Znajdziemy maksimum funkcji kwadratowej $d(t) = -3t^2 + 15t + 40$. W tym celu obliczymy współrzędne $(t_{max}\,, d_{max})$ wierzchołka paraboli będącej wykresem $d = d(t)$:

$$t_{max} = -\frac{B}{2A} = -\frac{15}{2\cdot(-3)} = 2{,}5\ \mathrm{s} \qquad d_{max} = -\frac{\Delta}{4A} = -\frac{15^2 - 4\cdot(-3)\cdot 40}{4\cdot(-3)} = 58{,}75\ \mathrm{m}$$

Największa odległość pomiędzy samochodami jest równa $58{,}75\ \mathrm{m}$.

Sposób 3. (z wykorzystaniem prędkości względnej)

Rozważamy ruch samochodu $\mathcal{P}$ w poruszającym się układzie odniesienia związanym na sztywno z samochodem $\mathcal{F}$. Początek tego układu odniesienia określimy w miejscu, gdzie znajdował się samochód $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$. Równanie ruchu (na prędkość) samochodu $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia $\mathcal{F}$ ma postać:

$$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t) = v_P - v_F = 6t - 15$$

$$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(0) = -15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Do chwili t_{max} (czyli do momentu zrównania się prędkości względem ziemi), samochód $\mathcal{P}$ – w układzie odniesienia samochodu $\mathcal{F}$ – oddala się od niego ($\mathcal{F}$ jest nieruchomy w swoim układzie odniesienia). Równość prędkości (względem ziemi) oznacza, że w chwili t_{max}, prędkość samochodu $\mathcal{P}$ w układzie $\mathcal{F}$ wynosi zero:

$$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 0$$

Od chwili t_{max}, samochód $\mathcal{P}$ będzie się zbliżał do $\mathcal{F}$. Zatem <u>w układzie odniesienia</u> $\mathcal{F}$, odległość między samochodami była największa w chwili t_{max} i wynosiła:

$$d_{max} = d_0 + \tilde{s}$$

gdzie $\tilde{s}$ jest drogą, jaką przebył samochód $\mathcal{P}$ <u>w układzie odniesienia</u> $\mathcal{F}$, od chwili $t_0 = 0$ do chwili t_{max}:

$$\tilde{s} = \frac{\tilde{v}_{\mathcal{P}}(0)^2 - \tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max})^2}{2a} = \frac{\tilde{v}_{\mathcal{P}}(0)^2}{2a}$$

$$\tilde{s} = \frac{15^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2\cdot 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 18{,}75\ \mathrm{m}$$

Zatem ostatecznie otrzymujemy:

$$d_{max} = d_0 + \tilde{s} = 40\ \mathrm{m} + 18{,}75\ \mathrm{m} = 58{,}75\ \mathrm{m}$$

Zadanie 2.1. (0–1)

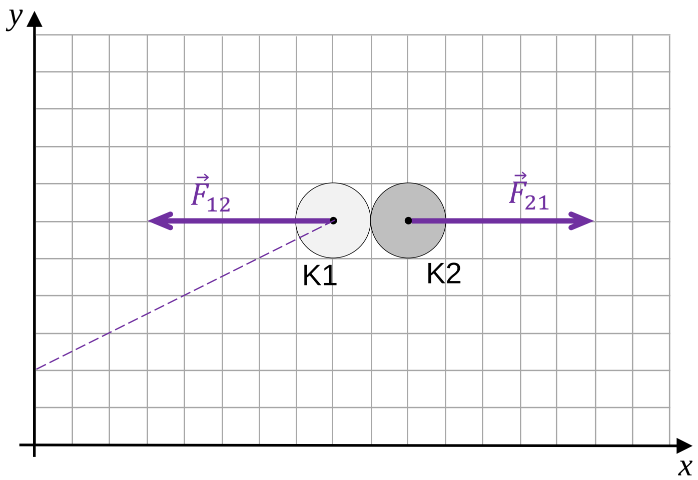
Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: I.6) tworzy […] rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk bądź problemu […]. II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał; II.16) rozróżnia i analizuje zderzenia sprężyste i niesprężyste.

Zasady oceniania

1 pkt – narysowanie poprawnych (co do kierunku, zwrotu i o równych wartościach) wektorów sił reakcji kul K1 i K2 (przyłożonych osobno do każdej kuli).

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie



Zadanie 2.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał; II.15) wykorzystuje zasadę zachowania pędu do opisu zachowania się izolowanego układu ciał; II.16) rozróżnia i analizuje zderzenia sprężyste i niesprężyste.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 3.1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu […]. II.20) posługuje się pojęciami […] energii kinetycznej, energii potencjalnej wraz z ich jednostkami; stosuje zasadę zachowania energii mechanicznej […]. III.2) stosuje pojęcie bryły sztywnej; opisuje ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi; III.5) oblicza energię ruchu bryły sztywnej jako sumę energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez środek masy.

Zasady oceniania
2 pkt – poprawne zaznaczenia w trzech zdaniach.
1 pkt – poprawne zaznaczenia w dwóch zdaniach.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie
PPF

Zadanie 3.2. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: II.4) opisuje ruchy prostoliniowe jednostajne i jednostajnie zmienne, posługując się zależnościami położenia, wartości prędkości i przyspieszenia oraz drogi od czasu; II.9) stosuje do obliczeń związki między promieniem okręgu, prędkością kątową, prędkością liniową […]; II.11) opisuje ruch niejednostajny po okręgu; II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał. III.4) stosuje zasady dynamiki dla ruchu obrotowego; posługuje się pojęciami przyspieszenia kątowego oraz momentu bezwładności […].

Zasady oceniania
(dla rozwiązania sposobem 1.)

4 pkt – poprawna metoda (zastosowanie zasad dynamiki) wyznaczenia przyśpieszenia liniowego a ciężarka poprzez g **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru końcowego.

3 pkt – poprawne zapisanie kompletu równań pozwalających wyznaczyć wartość przyśpieszenia liniowego a, tzn. spełnienie warunku za 2 pkt **oraz** uwzględnienie równości wartości sił, z jakimi linka działa na ciężarek i walec, **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym a przyśpieszeniem kątowym, **oraz** zastosowanie wzorów na moment bezwładności walca i siłę grawitacji, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R} = RT \quad \text{oraz} \quad ma = F - T \quad \text{oraz} \quad ma = mg - F$$

2 pkt – poprawne zapisanie równań ruchu wyrażających drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca **oraz** ruchu postępowego walca, **oraz** ruchu postępowego ciężarka, **oraz** uwzględnienie równości przyśpieszeń walca i ciężarka:

$$I\epsilon = RT \quad \text{oraz} \quad ma = F_1 - T \quad \text{oraz} \quad ma = F_g - F_2$$

1 pkt – poprawne zapisanie równania ruchu wyrażającego drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca **oraz** zapisanie równania ruchu wyrażającego drugą zasadę dynamiki dla ruchu postępowego walca albo ciężarka, np. zapisy równoważne poniższym:

$$I\epsilon = RT \quad \text{oraz} \quad \{ma_w = F_1 - T \quad \text{albo} \quad ma_c = F_g - F_2\}$$

LUB

– poprawne zapisanie równań ruchu wyrażających drugą zasadę dynamiki dla ruchu postępowego walca **oraz** ciężarka, np. zapisy równoważne poniższym:

$$ma_w = F_1 - T \quad \text{oraz} \quad ma_c = F_g - F_2$$

Uwaga! W obu warunkach za 1 pkt nie musi być uwzględniona równość przyśpieszeń walca i ciężarka oraz równość sił, z jakimi linka działa na ciężarek oraz walec.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania
(dla rozwiązania sposobem 2.)

4 pkt – poprawna metoda (zastosowanie zasady zachowania energii mechanicznej) wyznaczenia przyśpieszenia liniowego a ciężarka poprzez g **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru końcowego.

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia przyśpieszenia liniowego ciężarka, tzn. spełnienie warunków za 2 pkt **oraz** zastosowanie wzoru na moment bezwładności walca, **oraz** zastosowanie związku między prędkością a przyśpieszeniem i drogą w ruchu jednostajnie przyśpieszonym bez prędkości początkowej

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{oraz} \quad v^2 = 2ah$$

2 pkt – poprawne zapisanie równania wynikającego z zasady zachowania energii mechanicznej **oraz** poprawne zastosowanie wzorów na energię kinetyczną ruchu postępowego walca i ciężarka, energię kinetyczną ruchu obrotowego walca i energię potencjalną ciężarka, **oraz** zastosowanie związku między prędkością kątową walca a prędkością liniową walca, np. zapisy równoważne poniższym:

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 \quad \text{oraz} \quad v = \omega R$$

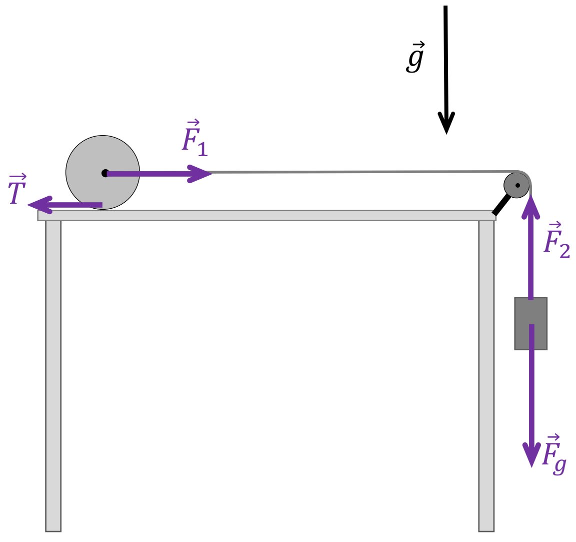
1 pkt – poprawne zapisanie równania wynikającego z zasady zachowania energii mechanicznej **oraz** wyodrębnienie w tym równaniu energii kinetycznych ruchu postępowego walca, ruchu postępowego ciężarka, ruchu obrotowego walca i energii potencjalnej ciężarka, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_{pot\ ciez} = E_{kin\ wal\ post} + E_{kin\ wal\ obr} + E_{kin\ ciez}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Sposób 1. (z zastosowaniem równań dynamiki)



Oznaczymy i opiszemy siły działające na walec i ciężarek. Na walec działa siła reakcji linki $\vec{F}_1$ oraz siła tarcia statycznego $\vec{T}$. Na ciężarek działa siła grawitacji $\vec{F}_g$ oraz siła reakcji linki $\vec{F}_2$. Zgodnie z przyjętym modelem zjawiska zapiszemy równania ruchu wyrażające drugą zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka oraz ruchu postępowego i obrotowego walca. Uwzględnimy fakt, że wartości przyśpieszeń liniowych ciężarka i walca są sobie równe (linka jest nierozciągliwa), wartości sił reakcji linki działających na walec i ciężarek są sobie równe (III zasada dynamiki, masę bloczka i linki pomijamy), masy ciężarka i bloczka są sobie równe:

$$\begin{cases} I\epsilon = RT \\ m_w a_w = F_1 - T \\ m_c a_c = F_g - F_2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} F_1 = F_2 = F \\ a_w = a_c = a \\ m_w = m_c = m \end{cases} \quad \text{zatem} \quad \begin{cases} I\epsilon = RT \\ ma = F - T \\ ma = F_g - F \end{cases}$$

Uwzględnimy związek $a = \epsilon R$ (wynikający z toczenia się bez poślizgu) między przyśpieszeniem kątowym walca a przyśpieszeniem liniowym walca (i ciężarka), a ponadto wstawimy wyrażenia na moment bezwładności I walca oraz siłę grawitacji:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R} = RT \\ ma = F - T \\ ma = mg - F \end{cases}$$

Z powyższego układu równań wyznaczymy a:

$$\begin{cases} \frac{ma}{2} = T \\ ma = F - T \\ ma = mg - F \end{cases} \xrightarrow{1)\to 2)} \begin{cases} ma = F - \frac{ma}{2} \\ ma = mg - F \end{cases} \xrightarrow{2)+3)} 2ma = mg - \frac{ma}{2} \quad \to$$

$$a = \frac{2}{5}g$$

<u>Sposób 2</u>. (z zastosowaniem zasady zachowania energii mechanicznej)

Zgodnie z przyjętym modelem zjawiska energia mechaniczna pozostaje stała podczas ruchu ciężarka i walca. W chwili początkowej energia mechaniczna układu jest równa energii potencjalnej ciężarka oraz walca. Gdy ciężarek obniży się o wysokość h, to energia mechaniczna układu będzie równa sumie energii kinetycznych walca i ciężarka i energii potencjalnej walca (przyjmujemy, że ciężarek po obniżeniu się o h będzie miał energię potencjalną równą zero):

$$E_{pot\,wal} + E_{pot\,ciez} = E_{kin\,wal} + E_{kin\,ciez} + E_{pot\,wal}$$

Energia potencjalna walca nie zmienia się, a energia kinetyczna walca jest równa sumie energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego względem środka masy, zatem:

$$E_{pot\,ciez} = E_{kin\,wal\,post} + E_{kin\,wal\,obr} + E_{kin\,ciez}$$

Zastosujemy wzory na wymienione powyżej energie kinetyczne:

$$mgh = \frac{1}{2}m_w v_w^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_c v_c^2$$

Wykorzystamy związek kinematyczny między przyśpieszeniem a drogą i prędkością w ruchu jednostajnie przyśpieszonym bez prędkości początkowej, związek między prędkością kątową i liniową (dla toczenia się bez poślizgu), wyrażenie na moment bezwładności walca oraz fakt, że wartości prędkości ciężarka i walca oraz ich masy są sobie równe:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$gh = \frac{5}{4}v^2 \xrightarrow{v^2=2as,\ s=h} gh = \frac{5}{4}\cdot 2ah \quad \to \quad a = \frac{2}{5}g$$

Zadanie 4.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. XII.1) wskazuje niezależność prędkości światła w próżni od prędkości źródła i prędkości obserwatora.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie
B1

Zadanie 4.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. X.11) analizuje efekt Dopplera dla fal w przypadku, gdy źródło lub obserwator poruszają się znacznie wolniej niż fala; podaje przykłady występowania tego zjawiska.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 4.3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: VIII.5) [SP] posługuje się pojęciami […] częstotliwości i długości fali do opisu fal oraz stosuje do obliczeń związki między tymi wielkościami wraz z ich jednostkami. I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu […]. X.11) analizuje efekt Dopplera dla fal w przypadku, gdy źródło lub obserwator poruszają się znacznie wolniej niż fala; podaje przykłady występowania tego zjawiska.

Zasady oceniania
1 pkt – poprawne zaznaczenia w dwóch zdaniach.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie
PP

Zadanie 4.4. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.2) posługuje się […] kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych; I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu […]. X.11) analizuje efekt Dopplera dla fal w przypadku, gdy źródło lub obserwator poruszają się znacznie wolniej niż fala; podaje przykłady występowania tego zjawiska.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości prędkości sondy **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką.

1 pkt – poprawne zastosowanie przybliżonego wzoru na efekt Dopplera w przypadku oddalającego się źródła fali **oraz** prawidłowa identyfikacja wielkości występujących w tym wzorze (tzn. podstawienie danych do wzoru albo zapisanie obok wartości wielkości występujących we wzorze)

LUB

– poprawne zastosowanie ścisłego wzoru na efekt Dopplera w przypadku oddalającego się źródła fali **oraz** prawidłowa identyfikacja wielkości występujących w tym wzorze (tzn. podstawienie danych do wzoru albo zapisanie obok wartości wielkości występujących we wzorze)

LUB

– poprawne zastosowanie przybliżonego lub ścisłego wzoru na efekt Dopplera w przypadku oddalającego się źródła fali **oraz** prawidłowe przekształcenie tego wzoru i wyprowadzenie wzoru pozwalającego obliczyć prędkość sondy.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga dodatkowa 1.

Gdy zdający zastosuje przybliżony wzór na efekt Dopplera w wersji z wartością bezwzględną:

$$\frac{|\Delta f|}{f_{źr}} \approx \frac{v}{c}$$

to w rozwiązaniu nie wymaga się obliczenia/określenia częstotliwości odbieranej przez obserwatora (zobacz sposób 1. rozwiązania).

Uwaga dodatkowa 2.

Przybliżony wzór na efekt Dopplera, gdy źródło się oddala, zdający może zapisać w równoważnych (równoważnie przekształconych) postaciach. Poniżej kilka z nich:

$$f_{ob} \approx f_{źr}\left(1-\frac{v}{c}\right) \quad \text{albo} \quad \frac{f_{źr}-f_{ob}}{f_{źr}} \approx \frac{v}{c} \quad \text{albo}$$

$$f_{źr} - |\Delta f| \approx f_{źr}\left(1-\frac{v}{c}\right) \quad \text{albo} \quad \frac{|\Delta f|}{f_{źr}} \approx \frac{v}{c} \quad \text{albo}$$

$$f_{ob} \approx f_{źr}\left(\frac{c-v}{c}\right) \quad \text{albo} \quad v \approx \left(1-\frac{f_{ob}}{f_{źr}}\right)c \quad \text{albo}$$

$$f_{ob}c \approx f_{źr}(c-v) \quad \text{albo} \quad v \approx c - c\frac{f_{ob}}{f_{źr}}$$

Ponadto zdający może wykorzystać fakt, że $c = \lambda_{źr}\, f_{źr}$. W takiej sytuacji wzór na efekt Dopplera może być zapisany w postaci „mieszanej” (z częstotliwością i długością fali):

$$c - v \approx \lambda_{źr}\, f_{ob}$$

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (z zastosowaniem przybliżonego wzoru Dopplera)
Sonda kosmiczna porusza się względem Ziemi z prędkością o wartości v dużo mniejszej od prędkości światła: $v \ll c$, a zatem możemy zastosować przybliżony wzór na efekt Dopplera dla fali świetlnej:

$$\frac{|\Delta f|}{f_{źr}} \approx \frac{v}{c} \qquad \rightarrow \qquad v \approx \frac{|\Delta f|}{f_{źr}} \cdot c$$

Zatem:

$$v \approx \frac{750 \cdot 10^3\ \mathrm{Hz}}{3 \cdot 10^9\ \mathrm{Hz}} \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \rightarrow \quad v \approx 750 \cdot 10^2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 75\ 000\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 75\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Uwaga!

Wzór $\frac{|\Delta f|}{f_{źr}} \approx \frac{v}{c}$ jest słuszny zarówno w przypadku, gdy źródło oddala się od obserwatora (wtedy: $\frac{f_{źr}-f_{ob}}{f_{źr}} \approx \frac{v}{c}$) jak i w przypadku, gdy źródło zbliża się do obserwatora (wtedy: $\frac{f_{ob}-f_{źr}}{f_{źr}} \approx \frac{v}{c}$).

Sposób 2. (z zastosowaniem ścisłego wzoru Dopplera)
Sonda kosmiczna oddala się od Ziemi, zatem zastosujemy wzór na efekt Dopplera dla fali elektromagnetycznej w przypadku, gdy źródło fali oddala się (częstotliwość fali odbieranej przez obserwatora jest mniejsza od częstotliwości źródła fali):

$$f_{ob} = f_{źr}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Powyższy wzór przekształcimy i wyznaczymy v:

$$\frac{f_{ob}^2}{f_{źr}^2} = \frac{c-v}{c+v}$$

$$f_{ob}^2 c + f_{ob}^2 v = f_{źr}^2 c - f_{źr}^2 v$$

$$f_{ob}^2 v + f_{źr}^2 v = f_{źr}^2 c - f_{ob}^2 c$$

$$v = \frac{f_{źr}^2 - f_{ob}^2}{f_{ob}^2 + f_{źr}^2} \cdot c$$

oraz

$$f_{ob} = f_{źr} - |\Delta f| = 3\ 000\ 000\ \mathrm{kHz} - 750\ \mathrm{kHz} = 2\ 999\ 250\ \mathrm{Hz}$$

$$v = \frac{3^2 - 2{,}99925^2}{3^2 + 2{,}99925^2} \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}00025 \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 75\ 000\ \mathrm{m/s}$$

Sposób 3. (z zastosowaniem przybliżonego wzoru Dopplera i wzoru na długość fali)
Przybliżony wzór na efekt Dopplera, gdy źródło się oddala, możemy zapisać w postaci:

$$v \approx c - c\frac{f_{ob}}{f_{źr}} = c - \lambda_{źr} f_{ob} \qquad \text{gdzie} \qquad \lambda_{źr} = \frac{c}{f_{źr}}$$

Wykonamy obliczenia pośrednie:

$$\lambda_{źr} = \frac{c}{f_{źr}} = \frac{3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3 \cdot 10^9\ \frac{1}{\mathrm{s}}} = 0{,}1\ \mathrm{m}$$

$$f_{ob} = f_{źr} - |\Delta f| = 3{,}000000 \cdot 10^9\ \frac{1}{\mathrm{s}} - 0{,}000750 \cdot 10^9\ \frac{1}{\mathrm{s}} = 2{,}999250 \cdot 10^9\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Otrzymane wartości podstawimy do pierwszego wzoru:

$$v \approx 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 0{,}1\ \mathrm{m} \cdot 2{,}999250 \cdot 10^9\ \frac{1}{\mathrm{s}} = 0{,}00075 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 75\,000\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Zadanie 5.1. (0–1)

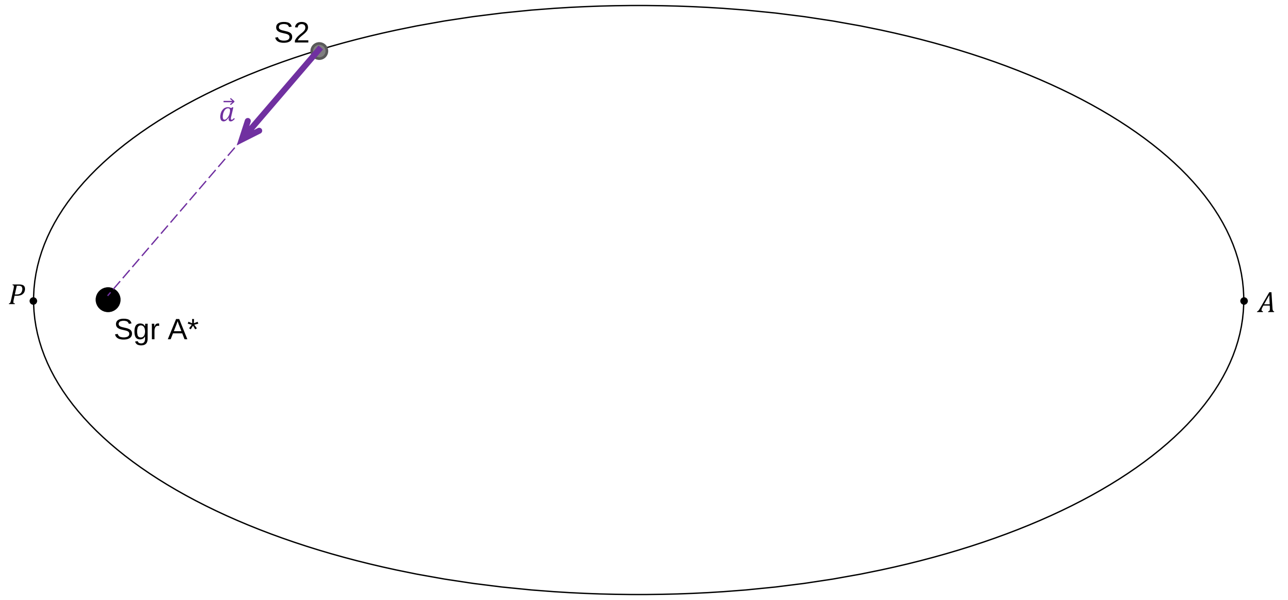
Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych.	Zdający: II.3) opisuje ruchy postępowe, posługując się wielkościami wektorowymi: […] przyspieszeniem […]; II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał. IV.1) posługuje się prawem powszechnego ciążenia do opisu oddziaływania grawitacyjnego […]; IV.3) analizuje jakościowo wpływ siły grawitacji Słońca na niejednostajny ruch planet po orbitach eliptycznych […].

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne narysowanie wektora przyśpieszenia $\vec{a}$ środka gwiazdy S2 w oznaczonym położeniu (wektor ma być zaczepiony w S2 i skierowany wzdłuż odcinka łączącego S2 z Sgr A* w stronę Sgr A*).

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Przykładowe rozwiązanie



Zadanie 5.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych.	Zdający: II.6) posługuje się pojęciem momentu pędu punktu materialnego […]; II.7) stosuje zasadę zachowania momentu pędu. IV.6) interpretuje II prawo Keplera jako konsekwencję zasady zachowania momentu pędu.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 5.3. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych. V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.2) posługuje się materiałami pomocniczymi, w tym […] kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych. IV.3) analizuje jakościowo wpływ siły grawitacji Słońca na niejednostajny ruch planet po orbitach eliptycznych […].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia ilorazu $\frac{M_{SA}}{M_S}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego zaokrąglonego do dwóch cyfr znaczących.

1 pkt – zastosowanie wzoru podanego w informacji do zadań 5.3–5.4. dla przypadku ruchu S2 po orbicie eliptycznej dookoła Sgr A* i ruchu Ziemi po orbicie kołowej dookoła Słońca **oraz** poprawne obliczenie długości półosi wielkiej orbity S2, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{M_{SA}}{M_S} = \left(\frac{a}{a_Z}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_Z}{T}\right)^2 \qquad \text{oraz} \qquad a = \frac{1}{2}(r_P + r_A) = 970 \text{ au}$$

albo (z wykorzystaniem wartości dla ruchu orbitalnego Ziemi)

$$\frac{M_{SA}}{M_S} = \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{(1 \text{ rok})^2}{(1 \text{ au})^3} \qquad \text{oraz} \qquad a = 970 \text{ au}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zastosujemy wzór podany w informacji do zadań 5.3.–5.4. dla przypadku ruchu S2 po orbicie eliptycznej dookoła Sgr A* i ruchu Ziemi po orbicie kołowej dookoła Słońca:

$$\frac{M_{SA}}{M_S} = \left(\frac{a}{a_Z}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_Z}{T}\right)^2$$

Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1. obliczymy a jako:

$$a = \frac{1}{2}|PA| = \frac{1}{2}(r_P + r_A) \;\rightarrow\; a = \frac{1}{2} \cdot (1820 + 120) \text{ au} = 970 \text{ au}$$

Zatem:

$$\frac{M_{SA}}{M_S} = \left(\frac{970 \text{ au}}{1 \text{ au}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1 \text{ rok}}{16 \text{ lat}}\right)^2 \approx 3{,}6 \cdot 10^6$$

Masa obiektu Sgr A* jest około $3{,}6 \cdot 10^6$ razy większa od masy Słońca.

Zadanie 5.4. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: IV.4) wskazuje siłę grawitacji jako siłę dośrodkową w ruchu po orbicie kołowej, oblicza wartość prędkości na orbicie kołowej o dowolnym promieniu […]; IV.5) interpretuje III prawo Keplera jako konsekwencję prawa powszechnego ciążenia; stosuje do obliczeń III prawo Keplera dla orbit kołowych.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda wyprowadzenia wzoru na iloraz mas centrów grawitacyjnych, poprawne przekształcenia **oraz** poprawna postać ilorazu – zgodna z podaną w treści zadania.

2 pkt – poprawna metoda wyprowadzenia lub bezpośrednie zapisanie (np. na mocy III prawa Keplera z wyrażeniem zawierającym stałe) jednego poprawnego wyrażenia, z którego można bezpośrednio obliczyć masę centrum grawitacyjnego jedynie na podstawie odpowiednich stałych, promienia a orbity kołowej i okresu T obiegu ciała dookoła tego centrum, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(m_i \frac{v_i^2}{a_i} = \frac{G m_i M_i}{a_i^2} \quad \text{oraz} \quad v_i = \frac{2\pi a_i}{T_i} \right) \rightarrow \text{[przekształcenia]} \rightarrow \quad M_i = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a_i^3}{T_i^2}$$

LUB

– zapisanie lub stwierdzenie, z powołaniem się na III prawo Keplera, że zachodzą następujące proporcje o tym samym współczynniku proporcjonalności:

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} \propto \mathrm{const} \cdot M_1 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{a_2^3}{T_2^2} \propto \mathrm{const} \cdot M_2$$

1 pkt – zapisanie relacji identyfikującej siłę grawitacji działającą na ciało C_1 (lub C_2) jako siłę dośrodkową (lub relacji identyfikującej przyśpieszenie dośrodkowe jako przyśpieszenie grawitacyjne) **oraz** uwzględnienie wzorów na te siły (lub przyśpieszenia), np. zapisy równoważne poniższym

$$m_1 \frac{v_1^2}{a_1} = \frac{G m_1 M_1}{a_1^2} \qquad \text{albo} \qquad m_1 \omega_1^2 a_1 = \frac{G m_1 M_1}{a_1^2} \qquad \text{albo} \qquad \omega_1^2 a_1 = \frac{G M_1}{a_1^2}$$

LUB

– skorzystanie ze wzoru na prędkość orbitalną ciała C_1 (lub C_2) **oraz** zastosowanie wzoru na prędkość w ruchu jednostajnym po okręgu dla tej orbity, np. zapisy równoważne poniższym

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{a_1}} \qquad \text{oraz} \qquad v_1 = \frac{2\pi a_1}{T_1}$$

LUB

– zapisanie lub stwierdzenie, z powołaniem się na III prawo Keplera, że zachodzi proporcja:

$$\frac{a^3}{T^2} \propto M$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Wyznaczymy związek między masą M_1 centrum grawitacyjnego a okresem T_1 obiegu (dookoła tego centrum) ciała C_1 po orbicie kołowej i promieniem a_1 tej orbity. Zapiszemy równanie identyfikujące siłę grawitacji jako siłę dośrodkową, łącznie z uwzględnieniem wzorów na te siły:

$$m_1 \frac{v_1^2}{a_1} = \frac{G m_1 M_1}{a_1^2}$$

Do powyższego równania podstawimy wzór na prędkość ciała C_1 w ruchu jednostajnym po okręgu: $v_1 = \frac{2\pi a_1}{T_1}$ i jednocześnie obie strony równania podzielimy przez masę ciała m_1. Następnie równanie przekształcimy i wyznaczymy masę M_1 centrum grawitacyjnego:

$$\frac{\left(\frac{2\pi a_1}{T_1}\right)^2}{a_1} = \frac{GM_1}{a_1^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{4\pi^2 a_1}{{T_1}^2} = \frac{GM_1}{a_1^2}$$

$$M_1 = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a_1^3}{T_1^2}$$

Analogicznie wyznaczymy masę M_2 drugiego centrum grawitacyjnego:

$$M_2 = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a_2^3}{T_2^2}$$

Wyznaczymy iloraz mas obu centrów grawitacyjnych:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\frac{4\pi^2}{G}\frac{a_1^3}{T_1^2}}{\frac{4\pi^2}{G}\frac{a_2^3}{T_2^2}} = \frac{\frac{a_1^3}{T_1^2}}{\frac{a_2^3}{T_2^2}} = \frac{a_1^3}{T_1^2}\cdot\frac{T_2^2}{a_2^3} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$$

Sposób 2.

Wyznaczymy związek między masą M_1 centrum grawitacyjnego a okresem T_1 obiegu (dookoła tego centrum) ciała C_1 po orbicie kołowej i promieniem a_1 tej orbity. Zapiszemy równanie identyfikujące przyśpieszenie dośrodkowe ciała C_1 na orbicie, jako przyśpieszenie grawitacyjne:

$$\omega_1^2 a_1 = \frac{GM_1}{a_1^2}$$

Do powyższego równania podstawimy wzór na prędkość kątową ciała C_1 w ruchu jednostajnym po orbicie kołowej: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$. Następnie równanie przekształcimy i wyznaczymy masę M_1 centrum grawitacyjnego:

$$\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 a_1 = \frac{GM_1}{a_1^2} \quad \rightarrow \quad \frac{4\pi^2}{{T_1}^2} = \frac{GM_1}{a_1^3} \quad \rightarrow \quad M_1 = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a_1^3}{T_1^2}$$

Iloraz mas obu centrów grawitacyjnych obliczamy podobnie jak w sposobie 1.

Zadanie 6.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: V.3) (SP) posługuje się pojęciem parcia (nacisku) oraz pojęciem ciśnienia w cieczach i gazach wraz z jego jednostką; stosuje do obliczeń związek między parciem a ciśnieniem. VI.9) opisuje związek pomiędzy temperaturą w skali Kelvina a średnią energią ruchu cząsteczek […]; VI.11) stosuje równanie gazu doskonałego (równanie Clapeyrona) do wyznaczenia parametrów gazu.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie
PP

Zadanie 6.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: VI.7) stosuje pierwszą zasadę termodynamiki do analizy przemian gazowych; rozróżnia przemiany: izotermiczną, izobaryczną, izochoryczną i adiabatyczną gazów; VI.9.) opisuje związek pomiędzy temperaturą w skali Kelvina a […] energią wewnętrzną gazu doskonałego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie
A2

Zadanie 6.3. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: VI.7) stosuje pierwszą zasadę termodynamiki do analizy przemian gazowych; rozróżnia przemiany: izotermiczną, izobaryczną, izochoryczną i adiabatyczną gazów; VI.9.) opisuje związek pomiędzy temperaturą w skali Kelvina a […] energią wewnętrzną gazu doskonałego; VI.12) posługuje się pojęciem ciepła molowego gazu; interpretuje związek między ciepłem molowym przy stałym ciśnieniu a ciepłem molowym w stałej objętości dla gazu doskonałego.

Zasady oceniania
(dla rozwiązania sposobem 1.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia pracy siły parcia gazu w drugiej przemianie **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką (znak może być dowolny).

2 pkt – zapisanie I zasady termodynamiki dla drugiej przemiany z poprawnym uwzględnieniem konwencji znaków (stosowanej konsekwentnie) **oraz** zapisanie związku między ciepłem pobranym w przemianie izobarycznej a przyrostem temperatury, **oraz** zapisanie związku między przyrostem energii wewnętrznej a przyrostem temperatury, **oraz** wykorzystanie związku między C_V a C_p, np. zapisy (lub zapisy równoważne):

$$n\frac{3}{2}R\Delta T_2 = |Q_2| - |W_2| \qquad \text{oraz} \qquad Q_2 = n\frac{5}{2}R\Delta T_2$$

1 pkt – zapisanie I zasady termodynamiki dla drugiej przemiany z poprawnym uwzględnieniem konwencji znaków (stosowanej konsekwentnie) **oraz** zapisanie związku między ciepłem pobranym w przemianie izobarycznej a przyrostem temperatury, np. zapisy (lub zapisy równoważne):

$$\Delta U_2 = |Q_2| - |W_2| \qquad \text{oraz} \qquad Q_2 = nC_p\Delta T_2$$

LUB

– zapisanie I zasady termodynamiki dla drugiej przemiany z konsekwentnym uwzględnieniem konwencji znaków **oraz** zapisanie związku między przyrostem energii wewnętrznej a przyrostem temperatury, np. zapisy (lub zapisy równoważne):

$$\Delta U_2 = |Q_2| - |W_2| \qquad \text{oraz} \qquad \Delta U_2 = nC_V\Delta T_2$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania
(dla rozwiązania sposobem 2.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia pracy siły parcia gazu w drugiej przemianie **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką (znak może być dowolny).

2 pkt – zapisanie (wykorzystanie) wzoru na pracę siły parcia **oraz** zapisanie (wykorzystanie) związku między ciepłem pobranym w przemianie izobarycznej a przyrostem temperatury, **oraz** zapisanie (wykorzystanie) związku (wynikającego z równania stanu gazu) między przyrostem temperatury a przyrostem objętości w przemianie izobarycznej, **oraz** wykorzystanie związku między C_V a C_p, np. zapisy (lub zapisy równoważne):

$$|W_2| = nR|\Delta T_2| \qquad \text{oraz} \qquad Q_2 = n\frac{5}{2}R\Delta T_2$$

LUB

– zapisanie (wykorzystanie) wzoru na pracę siły parcia **oraz** zapisanie (wykorzystanie) związku (wynikającego z równania stanu gazu) między przyrostem temperatury a przyrostem objętości w przemianie izobarycznej, **oraz** zapisanie I zasady termodynamiki dla drugiej przemiany z poprawnym (konsekwentnym) uwzględnieniem konwencji znaków, **oraz** zapisanie związku między przyrostem energii wewnętrznej a przyrostem temperatury:

$$|W_2| = nR|\Delta T_2| \qquad \text{oraz} \qquad n\frac{3}{2}R\Delta T_2 = |Q_2| - |W_2|$$

1 pkt – zapisanie wzoru na pracę siły parcia **oraz** zapisanie związku (wynikającego z równania stanu gazu) między przyrostem temperatury a przyrostem objętości w przemianie izobarycznej, np. zapisy (lub zapisy równoważne):

$|W_2| = p_2|\Delta V_2|$ oraz $p_2\Delta V_2 = nR\Delta T_2$

albo

$|W_2| = nR|\Delta T_2|$

LUB

– zapisanie wzoru na pracę siły parcia **oraz** zapisanie związku między ciepłem pobranym w przemianie izobarycznej a przyrostem temperatury, np. zapisy (lub zapisy równoważne):

$|W_2| = p_2|\Delta V_2|$ oraz $Q_2 = nC_p\Delta T_2$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (z zastosowaniem I zasady termodynamiki)

Zapiszemy I zasadę dynamiki dla drugiej przemiany. Przyjmiemy konwencję, zgodnie z którą stratę energii przez układ w postaci ciepła lub pracy oznaczamy znakiem minus, a wzrost energii w postaci ciepła lub pracy oznaczamy znakiem plus. W drugiej przemianie gaz pobiera ciepło, siła parcia wykonuje pracę, przyrost energii wewnętrznej jest dodatni (temperatura rośnie proporcjonalnie do objętości), zatem (indeks dolny $_2$ oznacza wielkości w drugiej przemianie):

$$1)\quad |\Delta U_2| = |Q_2| - |W_2|$$

Wykorzystamy związek między temperaturą (w tym przypadku przyrostem temperatury) a energią wewnętrzną (w tym przypadku przyrostem energii wewnętrznej) gazu doskonałego

$$2)\quad \frac{3}{2}nR|\Delta T_2| = |Q_2| - |W_2|$$

Wykorzystamy związek między ciepłem Q_2 pobranym w przemianie przy stałym ciśnieniu (w drugiej przemianie) a przyrostem ΔT_2 temperatury w tej przemianie:

$$3)\quad Q_2 = \frac{5}{2}nR\Delta T_2 \qquad \rightarrow \qquad 4)\quad \Delta T_2 = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{nR}\cdot Q_2$$

Przyrost temperatury określony wzorem 4) podstawimy do wzoru 2):

$$5)\quad \frac{3}{2}nR\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{nR}\cdot|Q_2| = |Q_2| - |W_2|$$

$$6)\quad \frac{3}{5}|Q_2| = |Q_2| - |W_2| \qquad \rightarrow \qquad |W_2| = \frac{2}{5}|Q_2| = \frac{2}{5}\cdot 100\ \mathrm{J} = 40\ \mathrm{J}$$

Sposób 2. (z zastosowaniem wzoru na pracę siły parcia)

Zapiszemy wzór na pracę w przemianie izobarycznej (indeks dolny $_2$ oznacza wielkości w drugiej przemianie):

$$1)\quad |W_2| = p_2|\Delta V_2|$$

Przyrost objętości wyznaczymy z równania stanu gazu doskonałego, przy stałym ciśnieniu

$$2)\quad p_2\Delta V_2 = nR\Delta T_2$$

Zależność otrzymaną w 2) podstawimy do równania 1):

$$3)\quad |W_2| = nR|\Delta T_2|$$

Wykorzystamy związek między ciepłem Q_2 pobranym w przemianie przy stałym ciśnieniu (w drugiej przemianie) a przyrostem ΔT_2 temperatury w tej przemianie:

$$4)\quad Q_2 = \frac{5}{2}nR\Delta T_2 \qquad \rightarrow \qquad 5)\quad \Delta T_2 = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{nR}\cdot Q_2$$

Przyrost temperatury określony wzorem 5) podstawimy do wzoru 3):

$$6)\quad |W_2| = nR\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{nR}\cdot|Q_2| \quad \rightarrow \quad |W_2| = \frac{2}{5}|Q_2| = \frac{2}{5}\cdot 100\ \mathrm{J} = 40\ \mathrm{J}$$

Zadanie 7.1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: II.9) stosuje do obliczeń związki między promieniem okręgu, prędkością kątową, prędkością liniową oraz przyspieszeniem dośrodkowym. IX.2) posługuje się pojęciem wektora indukcji magnetycznej wraz z jego jednostką, analizuje oddziaływanie pola magnetycznego na […] poruszającą się cząstkę naładowaną (siła elektrodynamiczna, siła Lorentza); IX.3) analizuje tor cząstki naładowanej w jednorodnym polu magnetycznym.

Zasady oceniania
2 pkt – poprawne zaznaczenia w trzech zdaniach.
1 pkt – poprawne zaznaczenia w dwóch zdaniach.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie
PFF

Zadanie 7.2. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał; II.20) posługuje się pojęciami pracy mechanicznej, […] energii kinetycznej, […] stosuje zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń. IX.2) posługuje się pojęciem wektora indukcji magnetycznej wraz z jego jednostką, analizuje oddziaływanie pola magnetycznego na […] poruszającą się cząstkę naładowaną (siła elektrodynamiczna, siła Lorentza).

Zasady oceniania

2 pkt – powołanie się na własność siły działającej na proton **oraz** powołanie się na zasady dynamiki, np. zapisy (lub zapisy równoważne):

(1) Siła Lorentza działająca na cząstkę naładowaną, poruszającą się w polu magnetycznym, jest zawsze prostopadła do prędkości tej cząstki.

(2) Zgodnie z II zasadą dynamiki, siła, która jest prostopadła do prędkości nie zmienia wartości tej prędkości.

albo

(1) Siła Lorentza działająca na cząstkę naładowaną, poruszającą się w polu magnetycznym, jest zawsze prostopadła do prędkości tej cząstki.

(2) Zgodnie z II zasadą dynamiki wartość prędkości się nie zmienia, ponieważ składowa siły w kierunku prędkości jest równa zero.

LUB

– powołanie się na własność siły działającej na proton **oraz** powołanie się na twierdzenie o pracy i zmianie energii kinetycznej, np. zapisy (lub zapisy równoważne):

(1) Siła Lorentza działająca na cząstkę naładowaną, poruszającą się w polu magnetycznym jest zawsze prostopadła do prędkości tej cząstki.

(2) Praca siły prostopadłej do prędkości jest równa zero, zatem zmiana energii kinetycznej jest równa zero.

LUB

– poprawne wyprowadzenie wzoru na wartość prędkości protonu na jednym z półokręgów **oraz** powołanie się na warunki zadania, że wartość indukcji pola magnetycznego na danym półokręgu jest stała, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{mv_{AF}^2}{r_{AF}} = qv_{AF}B_{AF} \qquad \rightarrow \qquad v = \frac{qB_{AF}r_{AF}}{m}$$

Ponieważ B_{AF} jest stałe na półokręgu AF, to v_{AF} też jest stała, co wynika ze wzoru. Podobnie na każdym innym półokręgu.

1 pkt – powołanie się na własność siły działającej na proton: zapisanie, że siła Lorentza działająca na cząstkę naładowaną, poruszającą się w polu magnetycznym jest zawsze prostopadła do prędkości tej cząstki
LUB
– zapisanie, że siła Lorentza działająca na proton pełni rolę siły dośrodkowej (słownie lub za pomocą wzoru, i brak wnioskowania o tym, co z tego wynika)
LUB
– stwierdzenie, że siła Lorentza / pole magnetyczne nie wykonuje pracy (i brak powołania się na związek pomiędzy pracą i zmianą energii kinetycznej).
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga dodatkowa
Jeżeli zdający nie powoła się na warunki zadania, tylko stałą wartość pola będzie wykazywał na podstawie błędnego w tym przypadku wzoru (np. $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$), to może otrzymać co najwyżej 1 pkt.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
(1) Siła Lorentza działająca na cząstkę naładowaną, poruszającą się w polu magnetycznym jest zawsze prostopadła do prędkości tej cząstki.
(2) Zgodnie z II zasadą dynamiki siła, która jest prostopadła do prędkości, nie zmienia tej prędkości w kierunku stycznym do toru (rzut siły na kierunek styczny do toru w danym punkcie jest równy zero – siła prostopadła do prędkości nie ma składowej w kierunku prędkości).

Sposób 2.
(1) Siła Lorentza działająca na cząstkę naładowaną, poruszającą się w polu magnetycznym, jest zawsze prostopadła do prędkości tej cząstki.
(2) Zgodnie z definicją pracy praca siły prostopadłej do prędkości jest równa zero. Z drugiej strony, praca siły wypadkowej działającej na ciało jest równa zmianie energii kinetycznej tego ciała. Zatem, skoro praca siły Lorentza działającej na cząstkę jest równa zero, to i zmiana energii kinetycznej cząstki jest równa zero. To oznacza, że wartość prędkości cząstki jest stała.

Sposób 3.

$$W_{F_L} = 0 \quad \text{oraz} \quad W_{F_{wyp}} = \Delta E_{kin} \quad \rightarrow \quad \Delta E_{kin} = 0 \quad \text{czyli} \quad E_{kin} = \text{const}$$

Sposób 4.
Siła Lorentza pełni rolę siły dośrodkowej na każdym *i*-tym półokręgu:

$$\frac{mv_i^2}{r_i} = qv_iB_i \qquad \rightarrow \qquad v = \frac{qB_ir_i}{m}$$

Ponieważ na każdym z półokręgów wartość indukcji pola magnetycznego jest stała i promień danego półokręgu jest stały, to iloczyn B_ir_i na *i*-tym półokręgu też jest stały. Zatem

$$v_i = \frac{qB_ir_i}{m} = \text{const}$$

Zadanie 7.3. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się pojęciem wektora indukcji magnetycznej wraz z jego jednostką, analizuje oddziaływanie pola magnetycznego na […] poruszającą się cząstkę naładowaną (siła elektrodynamiczna, siła Lorentza); IX.3) analizuje tor cząstki naładowanej w jednorodnym polu magnetycznym.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości wektora indukcji magnetycznej podczas ruchu protonu po półokręgu CD **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką.

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia prędkości w funkcji B i r **oraz** zapisanie równości wynikającej z przyrównania wartości prędkości protonu podczas ruchu po półokręgach AF i CD, np. zapisy (lub zapisy równoważne)

$$\frac{mv^2}{r_{AF}} = qvB_{AF} \qquad \rightarrow \qquad v = \frac{qB_{AF}r_{AF}}{m} = \frac{qB_{CD}r_{CD}}{m}$$

albo

$$\frac{mv^2}{r_{AF}} = qvB_{AF} \qquad \rightarrow \qquad B_{AF}r_{AF} = B_{CD}r_{CD}$$

1 pkt – zapisanie relacji identyfikującej siłę Lorentza jako siłę dośrodkową **oraz** uwzględnienie wzorów na te siły, np. zapisy (lub zapisy równoważne):

$$\frac{mv^2}{r} = qvB$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapiszemy równanie wynikające z faktu, że siła Lorentza pełni rolę siły dośrodkowej, następnie wyznaczymy prędkość ruchu protonu:

$$1)\quad \frac{mv^2}{r} = qvB \qquad \rightarrow \qquad 2)\quad v = \frac{qBr}{m}$$

Wykorzystamy fakt, że wartość prędkości protonu się nie zmienia. To oznacza, że wartość prędkości protonu podczas ruchu po półokręgu AF jest równa wartości prędkości protonu podczas ruchu po półokręgu CD. Zatem na mocy równania 2) mamy:

$$3)\quad \frac{qB_{AF}r_{AF}}{m} = \frac{qB_{CD}r_{CD}}{m}$$

$$4)\quad B_{AF}r_{AF} = B_{CD}r_{CD}$$

Na podstawie danych (z rysunku i treści) obliczamy promienie półokręgów:

$$5)\quad r_{AF} = \frac{3}{4}|AD| = \frac{3}{4}\ \mathrm{m} \qquad\qquad r_{CD} = \frac{1}{4}|AD| = \frac{1}{4}\ \mathrm{m}$$

Obliczone w 5) promienie oraz dane z treści zadania podstawimy do równania 4):

$$6)\quad 0{,}2\ \mathrm{T}\cdot\frac{3}{4}\ \mathrm{m} = B_{CD}\cdot\frac{1}{4}\ \mathrm{m} \qquad \rightarrow \qquad B_{CD} = 0{,}6\ \mathrm{T}$$

Zadanie 8.1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji oraz doświadczeń i wnioskowanie na podstawie ich wyników. IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.2) posługuje się […] kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych; I.7) wyodrębnia z tekstów […] lub wykresów […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach; I.9) […] interpretuje nachylenie […] prostej i punkty przecięcia z osiami. VIII.4) […] omawia zależność oporu od temperatury dla metali […].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia temperaturowego współczynnika oporu **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką (za prawidłowy uznaje się wynik, który da się zaokrąglić do $5 \cdot 10^{-3}\ 1/\mathrm{K}$).

1 pkt – zapisanie współczynnika α jako ilorazu: przyrostu stosunku oporów i przyrostu temperatury (np. jak w sposobie 1.) – w zakresie temperatur do $1000\ \mathrm{K}$ – **oraz** poprawne określenie $\frac{R}{R_0}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\alpha = \frac{\frac{R(T)}{R_0} - 1}{T - T_0} \qquad \text{oraz np. dla } T = 1000\ \mathrm{K} \qquad \frac{R(1000\ \mathrm{K})}{R_0} = 4{,}5$$

LUB

– zapisanie współczynnika α jako ilorazu: przyrostu oporów i iloczynu przyrostu temperatury i R_0 (np. jak w sposobie 2.) – w zakresie temperatur do $1000\ \mathrm{K}$ – **oraz** poprawne określenie $R(T)$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\alpha = \frac{R(T) - R_0}{R_0 \cdot (T - T_0)} \qquad \text{oraz np. dla } T = 1000\ \mathrm{K} \qquad R(1000\ \mathrm{K}) = 65\ \Omega \cdot 4{,}5$$

LUB

– zapisanie współczynnika α jako współczynnika kierunkowego prostej narysowanej przerywaną kreską (np. jak w sposobach 3. i 4.) – w dowolnym zakresie temperatur – **oraz** podstawienie prawidłowych współrzędnych punktów tej prostej do wzoru na współczynnik kierunkowy.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Na podstawie wykresu stwierdzamy, że w zakresie temperatur od $300\ \mathrm{K}$ do $1000\ \mathrm{K}$ zależność oporu wolframu od temperatury ma w przybliżeniu charakter liniowy, zatem w tym zakresie temperatur możemy stosować wzór do wyznaczania oporu włókna żarówki:

$$1)\ \ R = R_0(1+\alpha\Delta T) \quad \text{gdzie} \quad R_0 = R(T_0)\,, \ \ \Delta T = T - T_0\,, \qquad T_0 = 300\ \mathrm{K}$$

oraz α jest temperaturowym współczynnikiem oporu.

<u>Sposób 1.</u> obliczenia α (gdy zdający odczytuje wartości z wykresu $\frac{R}{R_0}(T)$)

Wzór 1) przekształcimy do postaci zależności, której wykres jest podany w zadaniu:

$$2)\ \ \frac{R}{R_0} = 1+\alpha\Delta T \qquad \rightarrow \qquad 3)\ \ \alpha = \frac{\left(\frac{R}{R_0}-1\right)}{T-T_0}$$

Współczynnik α obliczymy ze wzoru 3). W tym celu odczytamy wartość $\frac{R}{R_0}$ z wykresu dla wybranej temperatury z zakresu przybliżenia liniowego, np.:

$$\text{dla} \quad T = 900\ \mathrm{K} \qquad \text{mamy:} \qquad \frac{R(900\ \mathrm{K})}{R_0} \approx 4$$

Te wartości podstawimy do wzoru 3):

$$4)\ \ \alpha \approx \frac{4-1}{900\ \mathrm{K} - 300\ \mathrm{K}} = \frac{3}{600\ \mathrm{K}} = 0{,}005\ \frac{1}{\mathrm{K}}$$

<u>Sposób 2.</u> obliczenia α (gdy zdający odczytuje wartości z wykresu $\frac{R}{R_0}(T)$)

Współczynnik α obliczymy wprost ze wzoru 1), gdzie $R_0 \approx 65\ \Omega\,,\ T_0 = 300\ \mathrm{K}$:

$$2)\ \ \alpha \approx \frac{R(T) - R_0}{R_0(T-T_0)}$$

Wzór ten możemy stosować do $1000\ \mathrm{K}$ (gdy odczytujemy wartości z wykresu a nie z prostej). Zatem:

$$\text{dla} \quad T = 1000\ \mathrm{K} \quad \text{odczytujemy, że} \quad \frac{R(1000\ \mathrm{K})}{R_0} = 4{,}5 \quad \text{zatem}$$

$$R(1000\ \mathrm{K}) = 4{,}5 \cdot 65\ \Omega = 292{,}5\ \Omega$$

Powyższe wartości podstawiamy do równania 2):

$$3)\ \ \alpha \approx \frac{292{,}5\ \Omega - 65\ \Omega}{65\ \Omega \cdot (1000\ \mathrm{K} - 300\ \mathrm{K})} = \frac{227{,}5\ \Omega}{45\,500\ \Omega \cdot \mathrm{K}} = 0{,}005\ \frac{1}{\mathrm{K}}$$

Sposób 3. obliczenia α (gdy zdający odczytuje wartości z prostej)
Współczynnik α jest równy współczynnikowi kierunkowemu a prostej pokrywającej się częściowo z wykresem (w zakresie temperatur od $300\ \mathrm{K}$ do $1000\ \mathrm{K}$), zatem z dowolnych punktów tej prostej, np.: $(300\ \mathrm{K}, 1)$ i $(3\,200\ \mathrm{K}, 15)$, mamy:

$$\alpha = a = \frac{\Delta(\text{rzędnych})}{\Delta(\text{odciętych})}$$

$$\alpha = \frac{15-1}{3200\ \mathrm{K} - 300\ \mathrm{K}} = \frac{14}{2\,900\ \mathrm{K}} = 0{,}00482\ldots\ \frac{1}{\mathrm{K}} \approx 0{,}005\ \frac{1}{\mathrm{K}}$$

Sposób 4. obliczenia α (gdy zdający odczytuje wartość z prostej i stosuje wzór)
Współczynnik α jest równy współczynnikowi kierunkowemu a prostej pokrywającej się częściowo z wykresem (w zakresie temperatur od $300\ \mathrm{K}$ do $1000\ \mathrm{K}$). Zatem można skorzystać ze wzoru 1) z zastrzeżeniem, że poza zakresem przybliżenia liniowego $\frac{R}{R_0}$ nie jest już ilorazem rzeczywistego oporu R i R_0, tylko jest po prostu rzędną $\frac{R_{prosta}}{R_0}$ punktu leżącego na prostej:

$$\alpha = a = \frac{\left(\frac{R_{prosta}}{R_0} - 1\right)}{T - T_0}$$

Dla $T = 3200\ \mathrm{K}$ rzędna punktu na prostej wynosi $\frac{R_{prosta}}{R_0} = 15$, zatem:

$$\alpha = a = \frac{15-1}{3200\ \mathrm{K} - 300\ \mathrm{K}} = \frac{14}{2\,900\ \mathrm{K}} \approx 0{,}005\ \frac{1}{\mathrm{K}}$$

Zadanie 8.2. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji oraz doświadczeń i wnioskowanie na podstawie ich wyników. IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów […] lub wykresów […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. VIII.5) stosuje do obliczeń proporcjonalność natężenia prądu stałego do napięcia dla przewodników (prawo Ohma); VIII.8) stosuje do obliczeń związek mocy wydzielonej na oporniku (ciepła Joule'a-Lenza) z natężeniem prądu i oporem oraz napięciem i oporem. IX.9) wykorzystuje dane znamionowe urządzeń elektrycznych do obliczeń.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia temperatury włókna żarówki **oraz** podanie prawidłowej wartości liczbowej z jednostką, zawartej w przedziale od $2500\ \mathrm{K}$ do $2650\ \mathrm{K}$.

2 pkt – poprawne obliczenie oporu włókna żarówki **oraz** podanie prawidłowej wartości ilorazu $\frac{R}{R_0}$ dla włókna żarówki, np. zapisy (lub zapisy równoważne):

$$R = \frac{(230\ \mathrm{V})^2}{60\ \mathrm{W}} \approx 882\ \Omega \qquad \text{oraz} \qquad \frac{R}{R_0} \approx 13{,}6$$

LUB

– poprawna metoda obliczenia oporu włókna żarówki (tzn. zastosowanie związku między mocą znamionową a napięciem znamionowym i oporem) z błędem rachunkowym w obliczeniach **oraz** poprawna metoda wyznaczenia temperatury włókna żarówki (tzn. poprawne odczytanie z wykresu temperatury dla wyznaczonego oporu):

$$R = \frac{U_z^2}{P} \approx [\dots]\ \Omega \qquad \text{oraz} \qquad T = [\text{poprawnie odczytane do wyznaczonego } \frac{R}{R_0}]$$

1 pkt – poprawna metoda obliczenia oporu włókna **oraz** doprowadzenie do wyrażenia pozwalającego obliczyć opór włókna np. zapisy (lub zapisy równoważne):

$$P_z = U_z I_z \qquad \text{oraz} \qquad U_z = I_z R \quad \rightarrow \quad R = \frac{U_z}{\left(\frac{P_z}{U_z}\right)}$$

albo (od razu w jednym zapisie)

$$R = \frac{U_z^2}{P_z}$$

LUB

– strategia rozwiązania (wynikająca z zapisów albo opisana słownie) polegająca na dążeniu do obliczenia $\frac{R}{R_0}$ **oraz** wyznaczenia temperatury poprzez odczytanie z wykresu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zastosujemy wzór na moc wydzieloną na oporniku oraz związek między oporem opornika a natężeniem prądu przepływającego przez opornik i napięciem na tym oporniku. Zależności te zastosujemy do wyznaczenia oporu włókna żarówki przy zadanych parametrach znamionowych:

$$1)\ \ P_z = U_z I_z \qquad \text{oraz} \qquad 2)\ \ U_z = I_z R \quad \rightarrow \quad 3)\ \ P_z = \frac{U_Z^2}{R}$$

Z równania 3) wyznaczymy opór włókna żarówki:

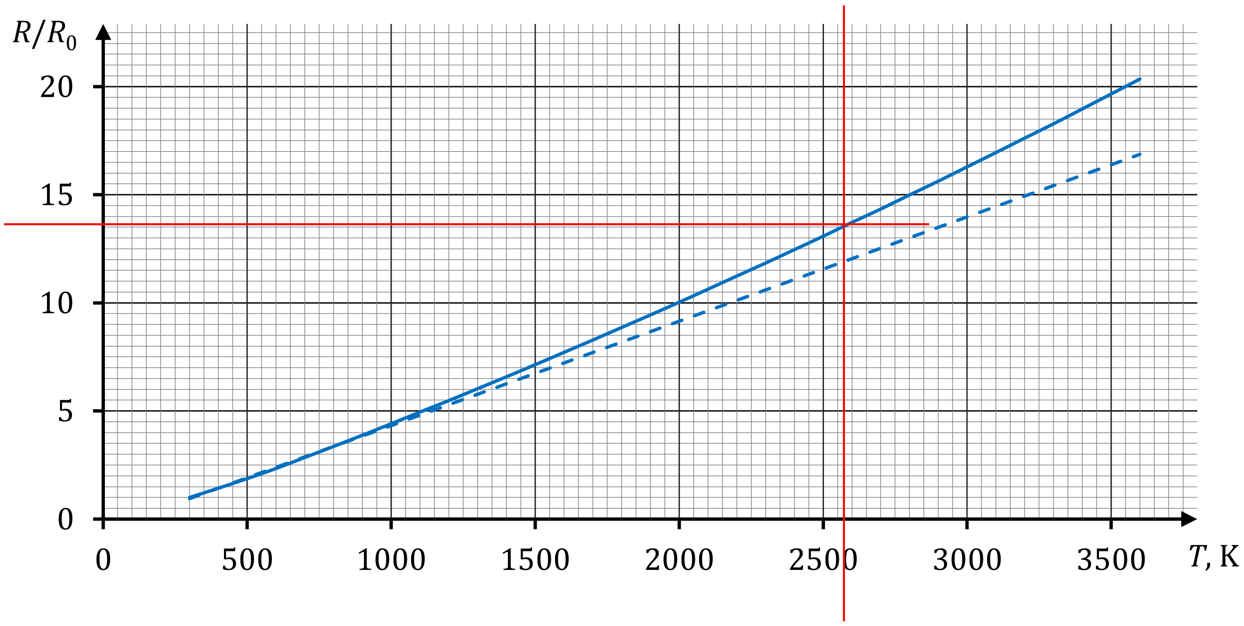
$$4)\ \ R = \frac{U_Z^2}{P_z} \quad \rightarrow \quad 5)\ \ R = \frac{(230\ \mathrm{V})^2}{60\ \mathrm{W}} \approx 882\ \Omega$$

Obliczymy iloraz oporu R i R_0:

$$6)\ \ \frac{R}{R_0} \approx \frac{882\ \Omega}{65\ \Omega} \approx 13{,}6$$

Odczytamy z wykresu temperaturę, dla której iloraz oporów ma wartość $13{,}6$:

$$7)\quad \frac{R}{R_0} \approx 13{,}6 \qquad \text{dla} \qquad T \approx 2\,550\ \mathrm{K}\ \ (\text{albo } T \approx 2\,570\ \mathrm{K})$$



Zadanie 8.3. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. VIII.3) analizuje zależność oporu od wymiarów przewodnika, posługuje się pojęciem oporu właściwego materiału i jego jednostką.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia długości drutu wolframowego **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką.

1 pkt – zastosowanie zależności między oporem przewodnika a jego wymiarami (z poprawną identyfikacją pola przekroju i długości przewodnika) i oporem właściwym **oraz** poprawna identyfikacja wartości oporu w $T_0 = 300\ \mathrm{K}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zastosujemy zależność między oporem przewodnika a jego wymiarami i oporem właściwym:

$$R_0 = \rho_0 \cdot \frac{l}{S}$$

$$l = \frac{R_0 S}{\rho_0} \approx \frac{65\ \Omega \cdot 3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 10^{-6\cdot 2}\ \mathrm{m}^2}{5{,}6 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}} \approx 8\,200 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m} \approx 0{,}82\ \mathrm{m}$$

Zadanie 9.1. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. X.6) stosuje prawo odbicia i prawo załamania fal na granicy dwóch ośrodków […].

Zasady oceniania

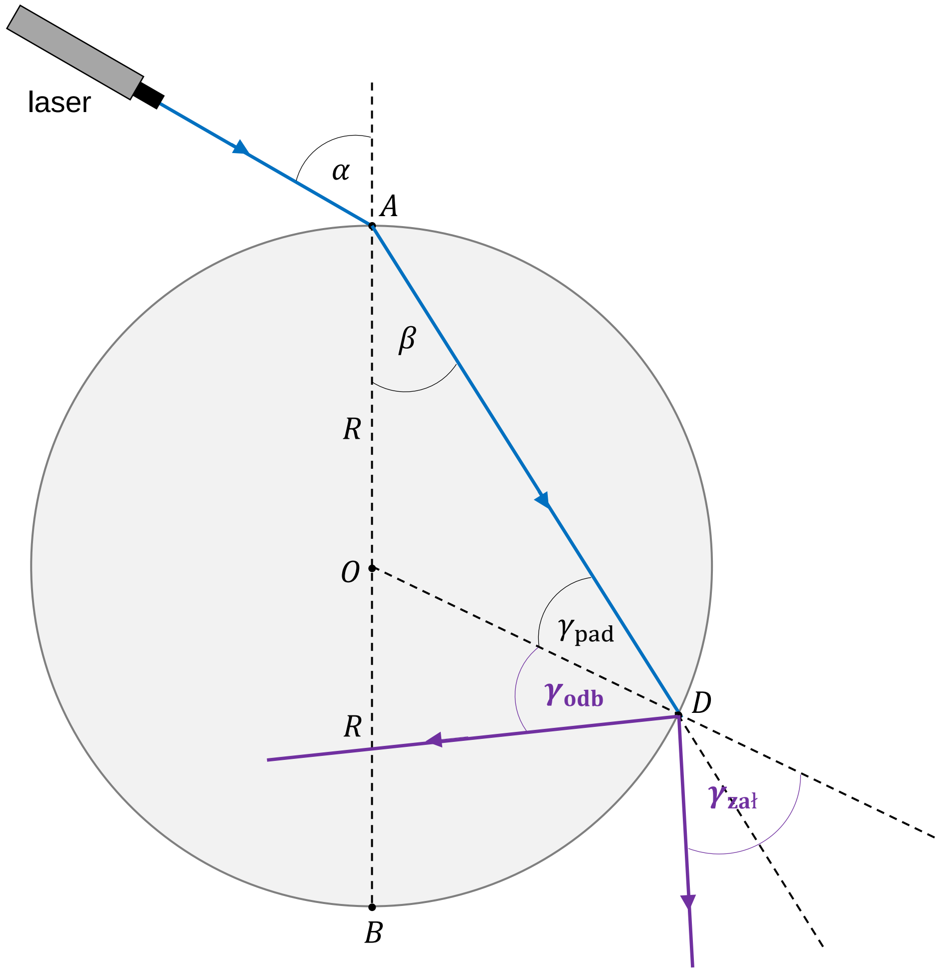
3 pkt – wypełnienie warunków **(a)** **oraz** **(b),** **oraz** **(c)** opisanych w kryterium za 1 pkt.

2 pkt – wypełnienie warunków **(a)** **oraz** **(b)** opisanych w kryterium za 1 pkt
LUB
– wypełnienie warunków **(a)** **oraz** **(c)** opisanych w kryterium za 1 pkt
LUB
– wypełnienie warunków **(b)** **oraz** **(c)** opisanych w kryterium za 1 pkt.

1 pkt – (**a**) poprawne narysowanie promienia odbitego w punkcie D **oraz** poprawne oznaczenie i podpisanie kąta odbicia jako γ_{odb}, **oraz** poprawne uzupełnienie relacji:
$\boldsymbol{\gamma_{\mathrm{pad}} = \gamma_{\mathrm{odb}}}$
LUB
– (**b**) poprawne narysowanie promienia załamanego w punkcie D **oraz** poprawne oznaczenie i podpisanie kąta załamania jako $\gamma_{\mathrm{zał}}$, **oraz** poprawne uzupełnienie relacji:
$\boldsymbol{\gamma_{\mathrm{pad}} < \gamma_{\mathrm{zał}}}$
LUB
– (**c**) poprawne narysowanie promienia załamanego w punkcie D **oraz** poprawne oznaczenie i podpisanie kąta załamania jako $\gamma_{\mathrm{zał}}$, **oraz** poprawne uzupełnienie relacji:
$\boldsymbol{\gamma_{\mathrm{zał}} = \alpha}$
LUB
– **(d)** poprawne narysowanie promienia odbitego **oraz** załamanego (w tym przypadku nie uwzględnia się braków lub błędów w podpisaniu kątów i uzupełnieniu relacji).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie



$\gamma_{\text{pad}} = \gamma_{\text{odb}}$ $\gamma_{\text{pad}} < \gamma_{\text{zał}}$ $\gamma_{\text{zał}} = \alpha$

Zadanie 9.2. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji oraz doświadczeń i wnioskowanie na podstawie ich wyników. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. X.6) stosuje prawo odbicia i prawo załamania fal na granicy dwóch ośrodków; posługuje się pojęciem współczynnika załamania ośrodka […].

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości prędkości światła w krążku **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego zaokrąglonego do dwóch cyfr znaczących: $1{,}8 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$ lub $1{,}9 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$.

2 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości prędkości światła w krążku, tzn.: zapisanie wzoru (z prędkościami i kątami) wynikającego z prawa załamania światła na granicy ośrodków **oraz** zapisanie sinusów jako ilorazów długości odpowiednich boków albo zapisanie ilorazu sinusów jako ilorazu długości odpowiednich boków albo poprawne obliczenie wartości sinusów kątów α i β (jakkolwiek), np. zapisy (lub zapisy równoważne):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{v} \quad \text{oraz} \quad \sin\alpha = \frac{|CB|}{|AB|} \quad \text{oraz} \quad \sin\beta = \frac{|BD|}{|AB|}$$

albo

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{v} \quad \text{oraz} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{|CB|}{|BD|}$$

albo

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{v} \quad \text{oraz} \quad \sin\alpha \approx 0{,}87 \quad \text{oraz} \quad \sin\beta \approx 0{,}53$$

1 pkt – zapisanie wzoru wynikającego z prawa załamania światła na granicy ośrodków (wzoru z prędkościami i kątami), zgodnie z oznaczeniami podanymi w treści zadania, np. zapis:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{v} \quad \text{albo} \quad \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{szk} \quad \text{oraz} \quad n_{szk} = \frac{c}{v} \right)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga dodatkowa

Jeśli zdający utożsamia (bezpodstawnie) miarę kąta $\angle ABD$ z miarą kąta $\angle BAC = \alpha$ albo stosuje bezpodstawny w tej sytuacji związek $\alpha + \beta = 90°$, a pozostałe elementy rozwiązania są poprawne, to może otrzymać co najwyżej 2 pkt.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapiszemy wzór wynikający z prawa załamania światła na granicy ośrodków, zgodnie z oznaczeniami na rysunku 2.:

$$1)\quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{v}$$

gdzie v jest wartością prędkości światła w krążku. Sinusy obu kątów określimy na podstawie stosunków odpowiednich boków w trójkątach prostokątnych ABC i ABD. Zauważmy, że na mocy twierdzenia o kątach wierzchołkowych mamy $\angle CAB = \alpha$. Zatem:

$$2)\quad \sin\alpha = \frac{|CB|}{|AB|} \quad \text{oraz} \quad \sin\beta = \frac{|BD|}{|AB|}$$

Związki zapisane w 2) podstawimy do 1):

$$3)\ \ \frac{\frac{|CB|}{|AB|}}{\frac{|BD|}{|AB|}} = \frac{c}{v} \qquad \rightarrow \qquad \frac{|CB|}{|BD|} = \frac{c}{v} \qquad \rightarrow \qquad 4)\ \ v = \frac{|BD|}{|CB|} \cdot c$$

Do wzoru 4) podstawimy podane w treści zadania długości odcinków i wartość prędkości światła w próżni:

$$5)\ \ v = \frac{4{,}8\ \mathrm{cm}}{7{,}8\ \mathrm{cm}} \cdot 3{,}0 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 1{,}8 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Zadanie 10.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów […] lub wykresów […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. XII.2) posługuje się związkiem między energią całkowitą, masą cząstki i jej prędkością; posługuje się pojęciem energii spoczynkowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 10.2. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: XII.2) posługuje się związkiem między energią całkowitą, masą cząstki i jej prędkością; posługuje się pojęciem energii spoczynkowej; XII.3) opisuje równoważność masy i energii spoczynkowej.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia ilorazu $\frac{v}{c}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego zaokrąglonego do dwóch cyfr znaczących.

2 pkt – zapisanie związku między energią całkowitą elektronu, energią spoczynkową i jego prędkością **oraz** zapisanie/uwzględnienie, że energia całkowita jest sumą energii spoczynkowej i kinetycznej, **oraz** wykorzystanie warunku zadania, **oraz** zapisanie równania, z którego można bezpośrednio obliczyć iloraz $\frac{v}{c}$, np. zapisy (lub zapisy równoważne):

$$E_{kin} + E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{oraz} \quad E_{kin} = 2E_0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 3$$

albo

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{oraz} \quad E = E_0 + 2E_0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 3$$

albo

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{oraz} \quad E = 3E_0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 3$$

albo (wszystko uwzględnione w jednym równaniu)

$$3E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

1 pkt – zapisanie związku między energią całkowitą elektronu, energią spoczynkową i jego prędkością **oraz** zapisanie energii całkowitej jako sumy energii spoczynkowej i kinetycznej, np. zapisy (lub zapisy równoważne):

$$E = E_{kin} + E_0 \quad \text{oraz} \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Sposób 1.

Zapiszemy związek między energią E całkowitą elektronu a energią spoczynkową E_0 i energią kinetyczną E_{kin}:

$$1)\quad E = E_{kin} + E_0$$

W równaniu 1) wykorzystamy związek między energią całkowitą elektronu, energią spoczynkową i jego prędkością:

$$2)\quad \frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = E_{kin} + E_0$$

W równaniu 2) skorzystamy z warunku zadania $E_{kin} = 2E_0$:

$$3)\quad \frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 2E_0 + E_0 \qquad \rightarrow \qquad 4)\quad \frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 3E_0$$

Przekształcimy równanie 4) i obliczymy iloraz $\frac{v}{c}$:

$$5)\quad \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 3 \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{3} \qquad \rightarrow \qquad 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$6)\quad \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0{,}942809\ldots \approx 0{,}94$$

Sposób 2.

Wykorzystamy związek między energią E całkowitą elektronu a energią spoczynkową E_0 i energią kinetyczną E_{kin} oraz wykorzystamy warunek zadania, oraz związek między energią całkowitą elektronu, energią spoczynkową i jego prędkością. To wszystko uwzględnimy w jednym równaniu:

$$3E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Przekształcimy powyższe równanie i obliczymy iloraz $\frac{v}{c}$:

$$3 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \rightarrow \qquad 9 = \frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0{,}942809\ldots \approx 0{,}94$$

Zadanie 10.3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: I.1) przedstawia jednostki wielkości fizycznych, opisuje ich związki z jednostkami podstawowymi […]. II.20) posługuje się pojęciami pracy mechanicznej, mocy, energii kinetycznej, energii potencjalnej wraz z ich jednostkami; stosuje zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń. VII.6) analizuje pracę jako zmianę energii potencjalnej podczas przemieszczenia ładunku w polu elektrycznym. XII.2) […] posługuje się pojęciem energii spoczynkowej.

Zasady oceniania
1 pkt – poprawne dokończenie zdania: wpisanie prawidłowej wartości napięcia.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie
Napięcie U pola elektrycznego, w którym został rozpędzony elektron, wynosi ...$10{,}2 \cdot 10^5$... V.

Zadanie 11.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.2) posługuje się materiałami pomocniczymi, w tym tablicami fizycznymi i chemicznymi oraz kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych. XII.5) posługuje się pojęciami pierwiastek, jądro atomowe, izotop, proton, neutron, elektron; opisuje skład jądra atomowego na podstawie liczb masowej i atomowej; XII.6) zapisuje reakcje jądrowe stosując zasadę zachowania liczby nukleonów i zasadę zachowania ładunku.

Zasady oceniania
1 pkt – poprawne uzupełnienie równania reakcji: wpisanie właściwych liczb atomowych **oraz** symbolu lub nazwy powstałej cząstki.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie

$$^{208}_{82}\mathrm{Pb} + ^{70}_{30}\mathrm{Zn} \rightarrow ^{277}_{112}\mathrm{Cn} + ^{1}_{0}\mathrm{n}$$

albo

$$^{208}_{82}\mathrm{Pb} + ^{70}_{30}\mathrm{Zn} \rightarrow ^{277}_{112}\mathrm{Cn} + \mathrm{n}$$

albo

$$^{208}_{82}\mathrm{Pb} + ^{70}_{30}\mathrm{Zn} \rightarrow ^{277}_{112}\mathrm{Cn} + \mathrm{neutron}$$

Zadanie 11.2. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych.	Zdający: I.2) posługuje się materiałami pomocniczymi, w tym tablicami fizycznymi i chemicznymi oraz kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych. XII.5) posługuje się pojęciami pierwiastek, jądro atomowe, izotop, proton, neutron, elektron; opisuje skład jądra atomowego na podstawie liczb masowej i atomowej; XII.6) zapisuje reakcje jądrowe stosując zasadę zachowania liczby nukleonów i zasadę zachowania ładunku; XII.9) […] opisuje rozpady alfa […].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne obliczenie liczby atomowej jądra, które powstaje po sześciu rozpadach alfa **oraz** zapisanie prawidłowej nazwy tego jądra.

1 pkt – prawidłowa metoda obliczenia liczby atomowej jądra, które powstaje po sześciu rozpadach alfa
LUB
– zapisanie prawidłowej nazwy powstałego jądra bez zapisania obliczeń liczby atomowej tego jądra.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie

Zachodzi sześć kolejnych rozpadów α, z których pierwszy jest rozpadem jądra $^{277}\mathrm{Cn}$. W każdym rozpadzie alfa powstaje nowe jądro oraz jądro helu $^{4}_{2}\mathrm{He}$. Po szóstym rozpadzie powstaje jądro pierwiastka, który oznaczymy $^{A}_{Z}\mathrm{X}$, gdzie:

$$A = 277 - 6 \cdot 4 = 253$$ (zapis opcjonalny)

$$Z = 112 - 6 \cdot 2 = 100$$

Nazwa lub symbol pierwiastka: Ferm albo $^{253}_{100}\mathrm{Fm}$ albo Fm

Zadanie 11.3. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych.	Zdający: I.2) posługuje się […] tablicami fizycznymi i chemicznymi oraz kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych. XII.7) stosuje zasadę zachowania energii do opisu reakcji jądrowych; posługuje się pojęciem energii wiązania; XII.8) oblicza dla dowolnego izotopu energię spoczynkową, deficyt masy i energię wiązania.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia energii wiązania jądra kopernik $^{277}_{112}\mathrm{Cn}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką (w dżulach lub elektronowoltach), zaokrąglonego do trzech cyfr znaczących. Uznaje się wyniki:

$(3{,}20 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J}$ lub $(2{,}00 \pm 0{,}03)\ \mathrm{GeV}$

2 pkt – poprawne zapisanie związku pomiędzy energią wiązania jądra $^{277}_{112}\mathrm{Cn}$ a deficytem masy jądra $^{277}_{112}\mathrm{Cn}$ **oraz** zapisanie różnicy pomiędzy masą wszystkich nukleonów a masą jądra $^{277}_{112}\mathrm{Cn}$, **oraz** poprawne podstawienie danych, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_{w\,\mathrm{Cn}} = (112 \cdot 1{,}672\,621\,92 + 165 \cdot 1{,}674\,927\,49 - 460{,}138\,852) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot \cdot 2{,}998^2 \cdot 10^{8\cdot 2}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Uwaga! *Zdający może otrzymać 2 pkt niezależnie od zaokrąglenia, z jakim podstawia dane.*

1 pkt – zidentyfikowanie energii potrzebnej do rozbicia jądra $^{277}_{112}\mathrm{Cn}$ jako energii wiązania tego jądra **oraz** zapisanie związku pomiędzy energią wiązania jądra $^{277}_{112}\mathrm{Cn}$ a deficytem masy tego jądra, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_{w\,\mathrm{Cn}} = \Delta m_{\mathrm{Cn}} c^2$$

LUB

– zapisanie deficytu masy jądra $^{277}_{112}\mathrm{Cn}$ jako różnicy pomiędzy masą wszystkich nukleonów tworzących to jądro a masą jądra $^{277}_{112}\mathrm{Cn}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta m_{\mathrm{Cn}} = 112 m_p + 165 m_n - m_{\mathrm{Cn}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Energia E, jaką należy dostarczyć do jądra kopernik $^{277}_{112}\mathrm{Cn}$, aby rozbić je na poszczególne nukleony, jest równa energii wiązania tego jądra. Wykorzystamy związek pomiędzy energią wiązania a deficytem masy jądra kopernik $^{277}_{112}\mathrm{Cn}$:

$$E = E_{w\,\mathrm{Cn}} = \Delta m_{\mathrm{Cn}} c^2$$

Jądro kopernik $^{277}_{112}\mathrm{Cn}$ ma 112 protonów i 165 neutronów, zatem:

$$E_{w\,\mathrm{Cn}} = \left(112m_p + 165m_n - m_{\mathrm{Cn}}\right)c^2$$

Podstawiamy odpowiednie wartości i wykonujemy obliczenia.

Ze względu na to, że nie znamy wyniku różnicy odpowiednich mas (w nawiasie powyżej), i nie wiemy ile cyfr znaczących będzie miał ten wynik, to do kalkulatora wprowadzamy dane z taką dokładnością, jaka jest podana w zadaniu i w *Wybranych wzorach i stałych na egzamin maturalny z biologii, chemii i fizyki.*

Sposób 1. rachunku zapewniającego poprawne zaokrąglenie

Wynik zaokrąglamy na samym końcu. W ten sposób zachowamy właściwą czwartą cyfrę wyniku, potrzebną do zaokrąglenia do trzech cyfr znaczących:

$$E_{w\,\mathrm{Cn}} \approx (112 \cdot 1{,}672\,621\,92 + 165 \cdot 1{,}674\,927\,49 - 460{,}138\,852) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$= (3{,}557\,838\,89) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot 8{,}988\,004 \cdot 10^{16}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 31{,}977\,870\,174\,7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J} \approx 32{,}0 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}$$

$$E_{w\,\mathrm{Cn}} \approx 3{,}20 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J} \approx 2{,}00\ \mathrm{GeV}$$

Sposób 2. rachunku zapewniającego poprawne zaokrąglenie

Pośrednie wyniki obliczeń zachowujemy zaokrąglone do czterech cyfr znaczących. Dzięki temu poprawnie zaokrąglimy wynik końcowy do trzech cyfr znaczących:

$$E_{w\,\mathrm{Cn}} \approx (112 \cdot 1{,}672\,621\,92 + 165 \cdot 1{,}674\,927\,49 - 460{,}138\,852) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$\approx 3{,}558 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot 8{,}988 \cdot 10^{16}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \approx 31{,}98 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J} \approx 32{,}0 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}$$

$$E_{w\,\mathrm{Cn}} \approx 3{,}20 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J} \approx 2{,}00\ \mathrm{GeV}$$